

CORRIGÉ 3

Exercice 1. Soit A l'événement "réussir le cours d'analyse", et S l'événement "réussir le cours de statistique". Nous savons que la probabilité de réussir l'examen d'analyse, $\Pr(A)$, vaut 0.5. Nous savons aussi que $\Pr(S) = 0.7$ et que $\Pr(A \cap S) = 0.3$.

- (a) $\Pr(\text{réussir au moins un des deux cours}) = \Pr(A \cup S) = \Pr(A) + \Pr(S) - \Pr(A \cap S) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$.
- (b) $\Pr(\text{échouer aux deux cours}) = \Pr(A^c \cap S^c) = 1 - \Pr(A \cup S) = 1 - 0.9 = 0.1$.
- (c) $\Pr(\text{échouer en statistiques et réussir en analyse}) = \Pr(S^c \cap A) = \Pr(A) - \Pr(S \cap A) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.
- (d) $\Pr(\text{échouer en analyse et réussir en statistiques}) = \Pr(A^c \cap S) = \Pr(S) - \Pr(S \cap A) = 0.7 - 0.3 = 0.4$.

NB : Pour visualiser ces opérations, il est conseillé d'utiliser un diagramme de Venn.

Exercice 2. On considère les deux événements

- A : "La première salle est occupée",
- B : "La seconde salle est occupée".

Les probabilités données dans l'énoncé sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(B), \\ \Pr(\text{l'une des salles au moins est occupée}) &= \Pr(A \cup B) = 0.9, \\ \Pr(\text{les deux salles sont occupées}) &= \Pr(A \cap B) = 0.5. \end{aligned}$$

Comme $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$, et que $\Pr(A) = \Pr(B)$, on peut déduire que

$$\Pr(A) = \Pr(B) = (\Pr(A \cup B) + \Pr(A \cap B))/2 = (0.9 + 0.5)/2 = 0.7.$$

De plus, on dénote A^c (resp. B^c), l'événement "la première (resp. la deuxième) salle est libre" et on a $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$ (resp. $\Pr(B^c) = 1 - \Pr(B)$).

(i). On obtient les probabilités demandées comme suit :

- (a) $\Pr(\text{La première salle est libre}) = \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 0.3$
- (b) $\Pr(\text{Les deux salles sont libres}) = \Pr(A^c \cap B^c) = 1 - \Pr(A \cup B) = 0.1$
- (c) $\Pr(\text{L'une des deux salles au moins est libre}) = \Pr(A^c \cup B^c) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0.5 = 0.5$.
- (d) $\Pr(\text{Une seule salle est libre}) = \Pr(A^c \cup B^c) - \Pr(A^c \cap B^c) = 0.5 - 0.1 = 0.4$
- (e) $\Pr(\text{La seconde salle est libre sachant que la première est occupée}) = \Pr(B^c | A) = \frac{\Pr(B^c \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B^c) - \Pr(B^c \cap A^c)}{\Pr(A)} = \frac{0.3 - 0.1}{0.7} = 2/7$.

(ii). Le deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B).$$

Nous avons $\Pr(A \cap B) = 0.5$ et $\Pr(A) \Pr(B) = 0.7^2 = 0.49$. Les deux quantités n'étant égales, les deux événements ne sont pas indépendants.

Exercice 3. Considérons les événements

$$\begin{aligned}F_1 &= \text{“une faute sur la première balle”}, \\F_2 &= \text{“une faute sur la deuxième balle”}.\end{aligned}$$

On sait que $\Pr(F_1) = 3/5$. On ne sert la deuxième balle que s’il y a une faute sur la première, donc $F_2 \subseteq F_1$ et $\Pr(F_2 | F_1) = 2/5$. La probabilité d’une double faute est donc $\Pr(F_1 \cap F_2) = \Pr(F_2 | F_1)\Pr(F_1) = 3/5 \times 2/5 = 6/25$.

Exercice 4. L’ensemble fondamental contient toutes les paires ordonnées de chiffres entre 1 et 6, donc 36 événements élémentaires

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), \dots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

Considérons les événements

$$A = \text{“la somme des deux chiffres vaut 8”} = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\},$$

$$B = \text{“on a lancé un 6”} = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (5, 6), (4, 6), (3, 6), (2, 6), (1, 6)\}.$$

Selon la définition, on a

$$\Pr(B | A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(\{(2, 6), (6, 2)\})}{\Pr(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\})} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$