

CORRIGÉ 11

**Exercice 1.** (a) Le modèle est :

$$\begin{array}{ll} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, 12\}, \\ X_1, \dots, X_{12} & \text{sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 & \text{sont inconnus.} \end{array}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 12.2, \quad H_1 : \mu \neq 12.2.$$

(b) On peut considérer la statistique

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

où  $\mu_0$  est la valeur spécifiée dans l'hypothèse, ici  $\mu_0 = 12.2$ .

On veut que la valeur de la statistique de test soit “petite” si  $H_0$  est vraie, et “grande” si  $H_1$  est vraie. On note que  $\bar{X}_n$  est un estimateur de la vraie valeur  $\mu$ . Donc si  $H_0$  est vraie, on s'attend à ce que  $\bar{X}_n \approx \mu_0$  et  $T \approx 0$ . En revanche, si  $H_1$  est vraie, on s'attend à ce que  $\bar{X}_n \approx \mu \neq \mu_0$  et  $T \gg 0$  ou  $T \ll 0$ . Si on utilise  $|T|$  comme statistique de test, on peut s'attendre à des valeurs “petites” sous  $H_0$  et des valeurs “grandes” sous  $H_1$ .

(c) Les valeurs de la statistique sont extrêmes quand  $|T|$  est “trop grande”, i.e. quand  $|T| > c$ , où  $c$  est une valeur critique. Autrement dit, la valeur de la statistique de test est extrême quand  $T < -c$  ou  $T > c$ .

Pour déterminer  $c$ , on se rappelle que l'on veut que la probabilité de l'erreur de type I soit égale à  $\alpha$  (qui est une petite valeur). L'erreur de type I consiste à rejeter  $H_0$  lorsque  $H_0$  est vraie. Dans notre cas, on veut donc que

$$\alpha = \Pr_{H_0}(\{T < -c\} \cup \{T > c\}) = \Pr_{\mu=\mu_0}(T < -c) + \Pr_{\mu=\mu_0}(T > c). \quad (1)$$

On sait que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Si  $H_0$  est vraie,  $\mu = \mu_0$ , et donc  $T \sim t_{n-1}$ . Ainsi, si  $H_0$  est vraie, on a par symétrie que

$$\Pr_{\mu=\mu_0}(T < -c) + \Pr_{\mu=\mu_0}(T > c) = 2\Pr_{\mu=\mu_0}(T > c) = 2(1 - \Pr_{\mu=\mu_0}(T \leq c)). \quad (2)$$

Pour que ceci soit égale à  $\alpha$  (voir (1)) il faut choisir  $c = t_{n-1, 1-\alpha/2}$ .

(d) On prend  $\alpha = 0.05$ , donc on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$  si

$$\left| \sqrt{12} \frac{\bar{X}_{12} - 12.2}{S_{12}} \right| > t_{11, 0.975}.$$

On a

$$\sqrt{12} \frac{\bar{x}_{12} - 12.2}{s_{12}} = 2.002 \quad \text{et} \quad t_{n-1, 1-\alpha/2} = 2.201,$$

donc on ne rejette pas  $H_0$  en faveur de  $H_1$ .

**Attention!** Même si on n'a pas rejeté  $H_0$ , on ne dit pas qu'on l'accepte. Quand on fait un test statistique, on cherche une évidence contre  $H_0$  en faveur de  $H_1$ . Quand on ne rejette pas  $H_0$ , cela veut simplement dire qu'il n'y a pas assez d'évidence contre cette hypothèse. Cela n'est pas la même chose que de montrer que  $H_0$  est vraie!

(e) On prend maintenant  $\alpha = 0.10$ , donc on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$  si

$$\left| \sqrt{12} \frac{\bar{X}_{12} - 12.2}{S_{12}} \right| > t_{11,0.95}.$$

On a

$$\sqrt{12} \frac{\bar{x}_{12} - 12.2}{s_{12}} = 2.002 \quad \text{et} \quad t_{11,0.95} = 1.796,$$

donc cette fois on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$ .

La seule différence avec la partie (d) est qu'ici on permet une plus grande probabilité pour l'erreur de type I. Avec une plus grande probabilité d'erreur de type I permise, on a "moins peur de rejeter". Autrement dit, on se satisfait de moins d'évidence pour rejeter  $H_0$ . Avec nos données, la différence entre 0.05 et 0.10 est assez grande pour changer la conclusion du test.

- (f) Les intervalles de confiance à  $100(1 - \alpha)\%$  qu'on a construits dans la série précédente sont en fait les ensembles des valeurs  $\mu_0$  telles qu'on ne rejette pas l'hypothèse  $H_0 : \mu = \mu_0$  en faveur de l'alternative  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  au niveau  $100 \times \alpha\%$ .
- (g) La valeur  $p_{obs}$  est la probabilité sous  $H_0$  que la statistique de test prenne une valeur aussi extrême ou encore plus extrême que la valeur observée. Dans notre cas, en utilisant (2)

$$p_{obs} = \Pr_{H_0}(\{T < -2.002\} \cup \{T > 2.002\}) = 2(1 - \Pr_{\mu=\mu_0}(T \leq 2.002)).$$

Si  $H_0$  est vraie,  $T \sim t_{11}$ , et donc

$$p_{obs} = 2(1 - F_{t_{11}}(2.002)) = 2(1 - 0.9647) = 0.071.$$

Noter que la valeur  $F_{t_{11}}(2.002)$  peut être trouvée en utilisant un logiciel statistique.

- (h)  $p_{obs} > 0.05$ , donc on ne rejette pas  $H_0$  en faveur de  $H_1$  au niveau 5%, mais  $p_{obs} < 0.10$ , donc on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$  au niveau 10%.

En fait, la valeur  $p_{obs}$  est le plus petit niveau auquel on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$ .

(i) Le modèle :

$$\begin{array}{ll} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, 12\}, \\ X_1, \dots, X_{12} & \text{sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 & \text{sont inconnus.} \end{array}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 15, \quad H_1 : \mu \neq 15.$$

Comme la valeur 15 n'est pas dans l'intervalle de confiance calculé la semaine passée, on peut rejeter  $H_0$  en faveur de  $H_1$  sans faire aucun calcul supplémentaire.

Pour la méthode directe, on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$  si

$$\sqrt{12} \left| \frac{\bar{X}_{12} - 15}{S_{12}} \right| > t_{11,0.975},$$

On a

$$\sqrt{12} \frac{\bar{x}_{12} - 15}{s_{12}} = -3.05 \quad \text{et} \quad t_{11,0.975} = 2.201,$$

donc on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$  au niveau 5%, et on peut dire que le nouveau modèle a une performance différente. On peut de plus conclure que la consommation est inférieure et donc que le nouveau modèle est meilleur.

**Exercice 2.** On suppose que l'on a deux échantillons indépendants (les variables de chaque échantillon indépendantes entre elles et les deux échantillons sont indépendants car il s'agit de 12 personnes différentes),  $X_1, \dots, X_6$  (les temps observés pour le premier groupe), et  $Y_1, \dots, Y_6$  (les temps observés pour le deuxième groupe), tels que  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  et  $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ .

*Ces suppositions sont discutables. Par exemple, les variances estimées des deux échantillons,  $s_X^2$  et  $s_Y^2$ , semblent être assez différentes. On fait ces suppositions ici quand même afin de pouvoir utiliser une statistique de test simple (la statistique donnée dans l'indication). Il existe d'autres méthodes qui peuvent être utilisées lorsque l'on veut faire des suppositions différentes (par exemple moins restrictives).*

L'hypothèse à tester est  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  contre l'alternative  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ . Autrement dit, on veut tester  $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$  contre  $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$ .

On peut baser le test sur la différence entre  $\bar{X}_6$  (l'estimateur de  $\mu_X$ ) et  $\bar{Y}_6$  (l'estimateur de  $\mu_Y$ ). Si  $H_0$  est vraie, on s'attend à ce que  $\bar{X}_6 \approx \bar{Y}_6$ , et si  $H_1$  est vraie, on s'attend à ce que  $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| \gg 0$ . Donc on va rejeter  $H_0$  en faveur de  $H_1$  si  $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| > c$ . Ceci est équivalent à  $|T| > d$ , où

$$T = \sqrt{6+6-2} \times \sqrt{\frac{6 \times 6}{6+6}} \times \frac{\bar{X}_6 - \bar{Y}_6}{\sqrt{5 \times S_X^2 + 5 \times S_Y^2}}. \quad (3)$$

En effet, si  $H_0$  est vraie, on a  $\mu_X = \mu_Y$  et donc la statistique donnée dans l'indication se réduit à la statistique  $T$  définie en (3). Par ailleurs, on sait d'après l'indication que  $T \sim t_{6+6-2}$ . On choisit  $\alpha = 0.05$  et donc on prend  $d = t_{10,0.975}$ .

Nous avons  $\bar{x}_6 = 2.95$ ,  $\bar{y}_6 = 3.82$ ,  $s_x^2 = 0.094$  et  $s_y^2 = 0.478$ , ce qui donne

$$t_{obs} = \sqrt{10} \times \sqrt{\frac{36}{12}} \times \frac{2.95 - 3.82}{\sqrt{5 \times 0.094 + 5 \times 0.478}} = -2.81.$$

Par ailleurs,  $t_{10,0.975} = 2.228$ . Ainsi, on rejette l'hypothèse  $H_0$  en faveur de  $H_1$  au niveau de 5%.

**Exercice 3.** La situation paraît assez similaire à celle de l'exercice 2. On a deux échantillons,  $X_1, \dots, X_{10}$  (les temps observés pour le soporifique A), et  $Y_1, \dots, Y_{10}$  (les temps observés pour le soporifique B), et on suppose  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  et  $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Les variables  $X_i$  peuvent être supposées indépendantes entre elles, et les variables  $Y_j$  peuvent être supposées indépendantes entre elles. Mais il y a une différence importante! On ne peut pas supposer que les variables  $X_i$  sont indépendantes des variables  $Y_i$ , parce que les médicaments ont été administrés aux mêmes personnes. Cela va changer la statistique de test que l'on va utiliser.

Pour obtenir une statistique de test, on va utiliser l'indication et travailler avec l'échantillon  $Z_1, \dots, Z_{10}$ , où  $Z_i = X_i - Y_i$  pour  $i \in \{1, \dots, 10\}$ . Les variables  $Z_i$  peuvent être supposées indépendantes et normales,  $Z_i \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2 = \text{var}(X_i) + \text{var}(Y_i) - 2\text{cov}(X_i, Y_i)$  inconnue. Maintenant on peut procéder comme dans l'exercice 1.

On va tester l'hypothèse  $H_0 : \mu_Y = \mu_X + 3$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu_Y \neq \mu_X + 3$ . Autrement dit,  $H_0 : \mu_X - \mu_Y = -3$  et  $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq -3$ . On va utiliser la statistique de test  $T$  où

$$T = \sqrt{10} \frac{\bar{Z}_{10} + 3}{S_{10}},$$

et on va rejeter  $H_0$  en faveur de  $H_1$  si  $t_{obs}$ , la réalisation de  $T$ , vérifie  $|t_{obs}| > t_{9,0.975}$  (on choisit  $\alpha = 0.05$ ).

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned}\bar{z}_{10} &= \bar{x}_{10} - \bar{y}_{10} = 0.75 - 2.19 = -1.44, \\ s_z^2 &= s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}^2 = 3.20 + 4.63 - 2 \times 3.11 = 1.61, \text{ et} \\ t_{obs} &= \sqrt{10} \frac{3 - 1.44}{\sqrt{1.61}} = 3.9.\end{aligned}$$

Comme  $t_{9,0.975} = 2.262$ , on rejette  $H_0$  en faveur de  $H_1$ . Donc, au niveau 5 %, on a montré que l'effet du soporifique B n'a pas une moyenne de 3 heures de plus que celui du soporifique A.