MATH233 Exercices

2025

SÉRIE 1

Exercice 1

Soit Ω un ensemble et soient $\mathbb{E}$, F et G trois événements de Ω. Quel événement correspond à chacune des descriptions suivantes ?

a) $\mathbb{E}$ et F se réalisent, mais G ne se réalise pas ;

b) au moins l'un de ces événements se réalise ;

c) au plus deux des trois événements se réalisent ;

d) exactement un de ces événements se réalise.

Solution 1

a) $\mathbb{E} \cap F \cap G^c$;

b) $\mathbb{E} \cup F \cup G$, ou encore $(E^c \cap F^c \cap G^c)^c$;

c) $(E \cap F \cap G)^c$;

d) $(E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$.

Exercice 2

Soit Ω un ensemble et soient $\mathbb{E}$, F et G trois événements de Ω. Quel événement correspond à chacune des descriptions suivantes ?

a) $\mathbb{E}$ est le seul des trois événements mentionnés qui se réalise ;

b) au moins deux de ces événements se réalise ;

c) au plus l'un des trois événements se réalisent ;

d) exactement deux de ces événements se réalisent.

Solution 2

a) $\mathbb{E} \cap F^c \cap G^c$;

b) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$;

c) $(E^c \cap F^c) \cup (E^c \cap G^c) \cup (F^c \cap G^c)$;

d) $(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G) \cup (E^c \cap F \cap G)$.

Exercice 3

On considère l'expérience (de pensée) qui consiste à lancer une pièce une infinité de fois. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k, l'événement: "le k-ième lancer est pile". Ecrire, à l'aide de A_k, l'événement A_∞: "à partir d'un certain lancer, on n'obtient plus que des piles".

Solution 3

$A_\infty = \{\omega \in \Omega : \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \geq n, \omega \in A_k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k$. Il s'agit en fait de l'ensemble des réalisations de l'espace fondamental Ω qui appartiennent à une infinité de A_k.

Exercice 4

Soit Ω un ensemble. Etant donné une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de Ω, on considère l'événement "il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles G_n se réalise" et on note cet événement $\limsup_{n\to\infty} G_n$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} G_m.$$

Solution 4

L'évènement "il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles G_n se réalise" est égal à l'évènement "pour tout n il existe $m \geq n$ tel que G_m se réalise". Ainsi,

$$\limsup_{n\to\infty} G_n = \{\omega \in \Omega : \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \geq n, \omega \in G_m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} G_m.$$

Exercice 5

Soit $(E_n, n \geqslant 1) \subset \mathcal{F}$. Trouver une suite $(F_n, n \geqslant 1) \subset \mathcal{F}$ d'événements deux à deux disjoints telle que pour tout $m \geqslant 1$,

$$\bigcup_{n=1}^{m} E_n = \bigcup_{n=1}^{m} F_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Solution 5

b) Posons tout d'abord $F_1 = E_1$, ce qui donne le résultat pour $m = 1$. Posons alors pour $n \geqslant 2$,

$$F_n = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)^c.$$

Le résultat étant vérifié pour $m = 1$, supposons le vrai pour $m-1$ et montrons par récurrence que celui-ci est vrai pour m :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{m} F_n = F_m \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} F_n\right) &= \left(E_m \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} E_i\right)^c\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} E_n\right) \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right) \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} E_i\right)^c \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} E_n\right)\right) \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right) \cap \Omega = \bigcup_{n=1}^{m} E_n .
\end{aligned}$$

De plus, par construction,

$$F_n = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)^c = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i\right)^c = E_n \cap F_1^c \cap \cdots \cap F_{n-1}^c$$

Ainsi, $F_n \cap F_j = \emptyset$, pour tout $j < n$. Par le point a), $F_n = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)^c \in \mathcal{F}$. Ceci établit la première conclusion. La deuxième découle des équivalences

$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &\Longleftrightarrow \exists m \geqslant 1 : \omega \in \bigcup_{n=1}^{m} E_n \\
&\Longleftrightarrow \exists m \geqslant 1 : \omega \in \bigcup_{n=1}^{m} F_n \Longleftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n
\end{aligned}$$

SÉRIES 2 ET 3

Exercice 6

Une expérience consiste à jeter un dé équilibré de manière répétée avec pour résultat le nombre de jets avant l'apparition d'un premier trois.

a) Définir l'espace fondamental Ω qui correspond à ce résultat.

b) Pour $k \geq 0$, soit A_k l'événement: "il faut k jets avant que (au jet $k+1$) le premier TROIS apparaisse". Calculer $\mathbb{P}(A_k)$, la probabilité de l'événement A_k, et $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(A_k)$.

c) Soient $\mathbb{E}_p$ et $\mathbb{E}_i$, les événements: "le nombre de jets avant le premier TROIS est pair, resp. impair".

   i) Exprimer $\mathbb{E}_p$ à l'aide des A_k et calculer $\mathbb{P}(E_p)$.

   ii) Calculer $\mathbb{P}(E_i)$.

Solution 6

a) $\Omega = \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{P}(A_k) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^k \dfrac{1}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-5/6} = 1$.

c) i) $\mathbb{E}_p = \bigcup_{k\geq 0} A_{2k}$ et $\mathbb{P}(E_p) = \dfrac{1}{6}\sum_{k\geq 0}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2k} = \dfrac{6}{11}$;

ii) $\mathbb{P}(E_i) = \dfrac{1}{6}\sum_{k\geq 0}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2k+1} = \dfrac{5}{11}$.

Exercice 7

On dispose d'un dé équitable.

a) Donner l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si on lance le dé trois fois de suite.

b) Quelle est la probabilité que la somme des résultats vaille 3, vaille 4 et vaille 5 ?

Solution 7

a) Soit l'ensemble $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ correspondant aux résultats du tirage du dé. L'ensemble fondamental correspondant à trois tirages successifs du dé est

$$\Omega = D \times D \times D = D^3 = \{(1,1,1), (1,1,2), \ldots, (6,6,5), (6,6,6)\}$$

Le premier nombre du triplet représente le résultat du premier jet, le deuxième nombre le deuxième jet et le troisième nombre le troisième jet. Comme chacun des singletons de Ω est observable à l'issue de l'expérience, la tribu associée à cette expérience est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Puisque le dé est équilibré, tous les singletons de Ω sont équiprobables. Comme $|\Omega| = 6^3 = 216$, la probabilité de chaque singleton est $\frac{1}{216}$. La fonction de probabilité est donc déterminée par

$$P\left(\{(d_1, d_2, d_3)\}\right) = \frac{1}{216}$$

pour tous $d_1, d_2, d_3 \in D$.

b) Notons A l'événement "la somme des résultats est 3". Il y a une seule manière d'obtenir une somme de 3 en trois jets de dé, à savoir d'obtenir trois fois 1. D'où

$$P(A) = P(\{(1,1,1)\}) = \frac{1}{216}$$

Soit B l'événement "la somme des résultats est 4". Pour obtenir une somme de 4 en trois jets de dé, il est nécessaire d'obtenir deux fois 1 et une fois 2. Il y a donc 3 situations où l'on obtient une somme de 4 et donc

$$P(B) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

Notons finalement C l'événement "la somme des résultats est 5". Dénombrons alors les situations où l'on obtient 5 avec trois lancers de dé. Observons qu'il y a deux manières différentes d'obtenir 5 comme somme de trois nombres entiers, à savoir $1 + 1 + 3$ ou $1 + 2 + 2$. Pour chacun de ces deux cas, il y a trois manières de jeter les dés correspondantes. Ainsi, il y a en tout $6 = 2 \cdot 3$ situations équiprobables conduisant à l'obtention d'une somme de 5. D'où

$$P(C) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Exercice 8

(a) En calculant de deux façons différentes le nombre de manières de constituer une classe d'étudiants avec un délégué de classe à partir d'un groupe de n étudiants, établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} .$$

(b) Utilisant que des mots (sans algèbre), expliquer pourquoi

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}, \quad \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}.$$

Solution 8

Le nombre d'étudiants de la classe à former n'est pas fixé.

a) <u>Première manière</u>: Si nous devons constituer une classe de k étudiants, nous avons $\binom{n}{k}$ façons de les choisir. Il y a ensuite k façons de choisir le délégué de classe. En sommant de $k = 1$ à n, nous obtenons $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ classes possibles.

   <u>Seconde manière</u>: Nous pouvons tout d'abord choisir un délégué (n choix), puis choisir pour chacun des $n-1$ étudiants restants, s'il intègre la classe ou non (2^{n-1} choix). Ceci nous donne finalement $n2^{n-1}$ équipes possibles.

b)
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ nous avons $\binom{n}{r}$ façons de choisir r étudiants à partir d'un groupe de n. Cela revient à choisir les $(n-r)$ étudiants à éliminer à partir du même groupe.
- Identité de Vandermonde $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$.

  Soit $\mathbb{E}$ et F deux ensembles disjoints de cardinalité respective m et n, et $G = E \cup F$ leur union. Il y a $\binom{m+n}{r}$ façons de choisir à r éléments dans G (dont le cardinal est $m+n$).
  Parmi ces groupes à r éléments on cherche à savoir combien il y en a qui contiennent exactement j éléments dans $\mathbb{E}$. Une fois choisis, il reste $r-j$ éléments à choisir dans F. Au total il y a $\binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$ façons de choisir r éléments dont j sont dans $\mathbb{E}$. En sommant de $j = 1$ à r, nous obtenons $\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$ possibilités.
- $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r}$. Cas particulier de l'identité de Vandermonde en choisissant l'ensemble $\mathbb{E}$ de cardinal 1.

Exercice 9

Un examen consiste à répondre à un ensemble de questions à choix multiples, chacune ayant cinq choix de réponses proposées (seule une réponse est correcte). Supposons que vous devez passer l'examen et que, pour chaque question, vous estimez à 3/4 votre probabilité de connaître la réponse. Si vous ignorez la réponse, vous décidez que vous cocherez une réponse au hasard. Quelle est la probabilité que vous répondrez correctement à une question donnée?

Solution 9

Soit A l'évenement "vous répondez correctement à la question". Soit B l'événement que "vous connaissez la réponse à la question". On veut calculer $\mathbb{P}(A)$. Or, par définition de la probabilité conditionnelle,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c) = 1 \cdot 3/4 + 1/5 \cdot 1/4 = 4/5 .$$

Exercice 10

Une urne contient r boules rouges et b boules bleues, $r \geq 1$, $b \geq 3$. Trois boules sont tirées au hasard sans remplacement. En utilisant la notion de probabilité conditionnelle pour simplifier le problème, trouver la probabilité de tirer dans l'ordre une boule bleue, une boule rouge et enfin, une boule bleue.

Solution 10

Soit B_i l'événement "une boule bleue est tirée au i^{eme} tirage" ($i \in \{1, 2, 3\}$). On définit R_i similairement. On a

$$\mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(B_3 \mid R_2 \cap B_1)P(R_2 \mid B_1)P(B_1) = \left(\frac{b-1}{r+b-2}\right)\left(\frac{r}{r+b-1}\right)\left(\frac{b}{r+b}\right).$$

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} c\left(4 - x^2\right) & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Quelle est la valeur de c ?

b) Représenter graphiquement puis calculer explicitement la fonction de répartition de X.

Mêmes questions pour la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} c\cos^2(x) & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution 11

4.19 a) Il s'agit de déterminer la constante c telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Pour que f soit positive et non identiquement nulle, il faut $c > 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= c\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = c\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\ &= c\left(\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right) = \frac{32}{3}c \end{aligned}$$

Nous devons donc poser $c = \frac{3}{32}$.

b) La fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X est donnée par $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$. Lorsque $x \leqslant -2$, cette intégrale est nulle. De plus, lorsque $x \geqslant 2$, nous avons $\int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$, par le point a). Il reste donc à déterminer $F(x)$, pour $-2 < x < 2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(u)du &= \frac{3}{32}\int_{-2}^{x}\left(4 - u^2\right)du = \frac{3}{32}\left(4u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{x} \\ &= \frac{3}{32}\left(\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right) = \frac{3}{32}\left(4x - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(16 + 12x - x^3\right) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -2, \\ \frac{1}{32}\left(16 + 12x - x^3\right) & \text{si } -2 < x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

a') Il s'agit de déterminer la constante c telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Pour que f soit positive et non identiquement nulle, il faut $c > 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= c\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx = c\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx \\ &= c\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi c}{4} \end{aligned}$$

Nous devons donc poser $c = \frac{4}{\pi}$.

b') La fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X est donnée par $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$. Lorsque $x \leqslant 0$, cette intégrale est nulle. De plus, lorsque $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $\int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$, par le point a). Il reste donc à déterminer $F(x)$, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(u)du &= \frac{4}{\pi}\int_0^{x} \cos^2(u)du = \frac{4}{\pi}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right)\Big|_0^{x} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right) & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 12

Soient F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X et D l'ensemble des discontinuités de F. Supposons que $\mathbb{P}\{X \in D\} > 0$ et posons $F_d(x) = \mathbb{P}\{X \leq x | X \in D\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que F_d est une fonction de répartition.

Solution 12

Vérifions tout d'abord que la fonction F_d est non décroissante. En effet, soit $x < y$. Alors

$$\begin{aligned} F_d(y) - F_d(x) &= P\{X \leqslant y \mid X \in D\} - P\{X \leqslant x \mid X \in D\} \\ &= P\{x < X \leqslant y \mid X \in D\} \geqslant 0, \end{aligned}$$

par définition de la probabilité. Calculons alors $\lim_{x\to-\infty} F_d(x)$. D'après la définition de la probabilité conditionnelle et le fait que $]-\infty, x] \cap D \subset]-\infty, x]$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F_d(x) &= P\{X \leqslant x \mid X \in D\} \\ &= \frac{P\{X \leqslant x, X \in D\}}{P\{X \in D\}} = \frac{P\{X \in]-\infty, x] \cap D\}}{P\{X \in D\}} \\ &\leqslant \frac{P\{X \in]-\infty, x]\}}{P\{X \in D\}} = \frac{F(x)}{P\{X \in D\}} \to 0, \end{aligned}$$

lorsque $x \to -\infty$, car F est une fonction de répartition. Ainsi, $\lim_{x\to-\infty} F_d(x) = 0$.

Calculons $\lim_{x\to+\infty} F_d(x)$. Considérons pour cela une suite réelle croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} F_d(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{P\{X \in]-\infty, x_n] \cap D\}}{P\{X \in D\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(E_n)}{P\{X \in D\}},$$

avec $E_n = \{X \in]-\infty, x_n] \cap D\}$. La suite d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et nous savons que $\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$, par la continuité de la probabilité. Or $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{X \in D\}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} F_d(x_n) = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)}{P\{X \in D\}} = \frac{P\{X \in D\}}{P\{X \in D\}} = 1.$$

Finalement, montrons la continuité à droite de F_d. On souhaite montrer que $\lim_{h\downarrow 0} F_d(x+h) = F_d(x)$. En utilisant la non-décroissance de F_d et le fait que $]x, x+h] \cap D \subset]x, x+h]$, nous observons que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F_d(x+h) - F_d(x) &= \frac{P\{X \in]x, x+h] \cap D\}}{P\{X \in D\}} \\ &\leqslant \frac{P\{X \in]x, x+h]\}}{P\{X \in D\}} = \frac{F(x+h) - F(x)}{P\{X \in D\}} \underset{h\downarrow 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

par la continuité à droite de F. Ainsi, F_d est bien une fonction de répartition.

SÉRIE 4

Exercice 13

On jette deux dés équilibrés indépendants. Soit X le produit des deux résultats. Trouver sa loi.

Solution 13

L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(r, g) : r, g \in \{1, \ldots, 6\}\}$, muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble des sous-ensembles de Ω ou *ensemble des parties de* Ω). Les deux dés étant équilibrés et indépendants, nous définissons la fonction de probabilité par $\mathbb{P}\{\omega\} = 1/36$ pour tout $\omega \in \Omega$. La variable aléatoire X est alors donnée par $X(\omega) = rg$ où $\omega = (r, g)$. Le support de X est donc $S = \{rg : r, g \in \{1, \ldots, 6\}\}$. En comptant les ω qui donnent lieu à chacune de ces valeurs, nous obtenons

$$P(X = x) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } x \in \{1, 9, 16, 25, 36\}, \\ 1/18 & \text{si } x \in \{2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30\}, \\ 1/12 & \text{si } x = 4, \\ 1/9 & \text{si } x \in \{6, 12\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 14

Pour les lois suivantes, vérifier que somme des probabilités vaut 1: (a) la loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}$; (b) la loi de Poisson avec paramètre λ; (c) la loi binomiale négative de paramètres (r, p).

Indications:

1. Noter que: $(1-x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} x^j$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $|x| < 1$.

2. Loi binomiale négative (r, p) : $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$, $n = r, r+1, \ldots, r \in \mathcal{N}^*, 0 < p \leq 1$.

Solution 14

On a:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}$$
$$= p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}$$
$$= p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n}$$
$$= p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Y = n) = \exp^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \exp^{-\lambda}\exp^{\lambda} = 1$$

.

c)

$$\sum_{n=r}^{\infty} P(Z = n) = p^r\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}(p-1)^{n-r}$$
$$= p^r\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}(1-p)^{n}$$
$$= p^r\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{n}(1-p)^{n} = 1$$

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. Pour $x > 0$ et $y > 0$, montrer que $\mathbb{P}(X > x + y|X > y) = \mathbb{P}(X > x)$ (propriété d'absence de mémoire).

Solution 15

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. Alors $\mathbb{P}\{X \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}$, pour $x > 0$. Ainsi, $\mathbb{P}\{X > x\} = 1 - P\{X \leqslant x\} = e^{-\lambda x}$, pour $x > 0$. Par la définition de probabilité conditionnelle et le fait que $\{X > x + y\} \subset \{X > y\}$, pour $x > 0$ et $y > 0$, nous avons

$$P\{X > x + y \mid X > y\} = \frac{P\{X > x + y, X > y\}}{P\{X > y\}} = \frac{P\{X > x + y\}}{P\{X > y\}}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P\{X > x\}.$$

Exercice 16

a) (Loi log-normale) Soit X une v.a. normale standard. Trouver la fonction de densité de la v.a. $Y = e^X$

b) Soient X une v.a. normale standard et Z une v.a. qui est solution de l'équation $Z^3 + Z + 1 = X$. Trouver la fonction de densité de Z.

Solution 16

a) Observons que $Y = g(X)$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = e^x$. La fonction g est bijective, g et g^{-1} sont de classe C^1 et $\mathbb{P}\{X \in \mathbb{R}\} = 1$. Nous pouvons donc appliquer le lemme du cours :

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{|g'\left(g^{-1}(y)\right)|}$$

Comme X est une v.a. normale standard, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Ainsi, pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\log y)^2/2}}{\left|e^{\log(y)}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-(\log y)^2/2},$$

et $f_Y(y) = 0$ si $y \leqslant 0$.

b) Vérifions tout d'abord que la v.a. Z est bien définie. Observons que $h(Z) = X$, avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(z) = z^3 + z + 1$. Cette fonction est bijective, h et h^{-1} sont de classe C^1 et $\mathbb{P}\{X \in \mathbb{R}\} = 1$. En effet, $h'(z) = 3z^2 + 1 > 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, donc h est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \to +\infty} h(z) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} h(z) = -\infty$, ce qui assure la bijectivité de h. La v.a. Z est donc bien définie, elle est donnée par $Z = h^{-1}(X)$. D'après la remarque 4.25 , la densité f_Z de la v.a. Z est $f_Z(z) = f_X(h(z))\,|h'(z)|$. Comme X est une v.a. normale standard,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(3z^2 + 1\right) e^{-\left(z^3+z+1\right)^2/2}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 17

Cet exercice présente la démarche permettant de simuler des nombres aléatoires selon une loi donnée.

a) Comment générer une variable aléatoire uniforme à partir d'une suite de variable Bernoulli? Indication: penser à une combinaison linéaire de variables Bernoulli et au développement en base 2.

b) Comment générer une variable aléatoire de loi arbitraire à partir d'une variable aléatoire uniforme?

Solution 17

a) Pour $x \in [0, 1]$, il existe des $a_n \in \{0, 1\}$, $n \geq 1$ tels que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ (représentation en base 2 de x). On pose alors $U := \sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$ où les X_n, $n = 1, 2, \ldots$ sont des variables aléatoires Bernoulli.

On montre d'abord que U est une variable continue. Notons que U prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et soit F la fonction de répartition de U. Comme $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et que F est continue à droite sur tout $\mathbb{R}$ (en tant que fonction de répartition), il reste à montrer que F est continue à gauche sur l'intervalle $]0, 1]$. Soit pour ceci $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} \in]0, 1]$. Il suffit d'observer que $\mathbb{P}(X_n = a_n, n \geq 1) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$. En effet, puisque x a au plus deux développements base 2, on a $F(x) - F(x-) = P(U = x) = 0$, autrement dit, $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ <}} F(y) = F(x)$. Comme $x \in]0, 1]$ est arbitraire, F est ainsi continue à gauche.

Montrons maintenant que U est uniformément distribuée sur $]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathcal{N}^*$ et pour tout entier $0 \leq k < 2^n$, on note que $k2^{-n} \leq x < (k + 1)2^{-n}$ si et seulement si le développement de x commence par $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, un certain n-tuple correspondant aux premiers termes de la représentation des réels de l'intervalle $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$. Par conséquent, puisque F est continue, $\mathbb{P}(k2^{-n} \leq U < (k+1)2^{-n}) = 2^{-n}$. Comme n et $k(n)$ sont quelconques, on a prouvé que U est une variable Unif$(0,1)$.

Le problème de générer des nombres aléatoire suivant une loi uniforme se ramène donc à la génération d'une suite de "bits" aléatoires indépendants pouvant prendre chacun la valeur 0 ou 1 avec probabilité 1/2.

b) Maintenant, une variable aléatoire de loi donnée peut être simulée à partir de la distribution uniforme en utilisant la *méthode de la fonction inverse*. Introduisons pour ceci la définition suivante: pour une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$, *l'inverse généralisé* de F, noté F^{-1}, est la fonction définie par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\} \qquad (0 < u < 1).$$

On a alors le résultat suivant: si $U \sim$ Unif$(0,1)$, alors $F^{-1}(U)$ a F pour loi de répartition. En effet, il s'agit de montrer que

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = F(x).$$

Nous allons montrer le résultat sous l'hypothèse que F est strictement croissante. Alors on a

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(U) \leq x) &= P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) && (F \text{ est monotone croissante}) \\ &= P(U \leq F(x)) && (\text{définition de la transformée inverse}) \\ &= F(x) && (U \sim \text{Unif}(0,1)). \end{aligned} \tag{1}$$

Lorsque l'on veut générer des nombres aléatoires selon une loi donnée de fonction de répartition F, on procède donc comme suit:

- Générer un nombre aléatoire u issu d'une loi Unif$(0,1)$;
- Calculer $x = F^{-1}(u)$;
- Considérer x comme étant le nombre aléatoire issu de la distribution décrite par F.

En pratique, on recourt à l'informatique est les nombres simulés ne sont que "pseudo aléatoires". Cependant, on considère que l'on dispose d'un bon algorithme générateur si on ne parvient pas à distinguer la suite obtenue de nombres pseudo aléatoires d'une suite qui serait véritablement aléatoire.

SÉRIE 5

Exercice 18

Spit X une v.a. telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}[(X-a)^2]$ soit minimal.

Solution 18

Soit $\varphi(a) = E\left[(X-a)^2\right]$. Alors

$$\varphi(a) = E\left[(X-a)^2\right] = E\left[X^2 - 2aX + a^2\right] = E\left[X^2\right] - 2aE[X] + a^2.$$

La fonction φ est un polynôme de degré 2 en a dont le terme quadratique est à coefficient positif. Ainsi, son minimum est atteint en $a = \frac{2E[X]}{2} = E[X]$. La valeur de a qui minimise la fonction φ correspond donc à l'espérance de X. De plus, la valeur minimale réalisée est $\varphi(E[X]) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \text{Var}(X)$.

Exercice 19

Montrer que :

a) $\mathbb{E}[|X|] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq k)$. X est discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{E}[|X|] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}[|X| > x]dx$ lorsque X est continue.

Solution 19

Soit $Y = |X|$.

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{j=0}^{\infty} j\, \mathbb{P}(Y = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}(Y = j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(Y = j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_0^{\infty} y f(y)\, dy \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{y} f(y)\, dx \right) dy \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{y=x}^{\infty} f(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y > x)\, dx.
\end{aligned}$$

Exercice 20

Soit X une variable géométrique de probabilité $\mathbb{P} > 0$ correspondant au nombre de lancers d'une pièce avant d'obtenir un premier succès. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = (p-1)/p$:

a) en conditionnant sur le résultat du premier lancer pour obtenir $\mathbb{E}(X) = (1-p)(1+\mathbb{E}(X))$;

b) à l'aide des dérivées de l'équation $\sum_{x=0}^{\infty} u^x = 1/(1-u)$, ($|u| < 1$).

Indication : la formule des probabilités totales donne $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \mid A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X \mid A^c) \times \mathbb{P}(A^c)$.

Solution 20

a) Soit A l'événement que "le premier essai est un succès". En conditionnant sur A, on a deux cas:

   i) soit un succès avec une probabilité $\mathbb{P}(A) = p$.

ii) soit un échec avec une probabilité $\mathbb{P}(A^c) = 1 - p$. Dans ce cas le nombre prévu d'échecs supplémentaires avant le premier succès est $\mathbb{E}(X)$. L'espérance conditionnelle de X, étant donné qu'il y a eu un échec au premier essai, est donc $\mathbb{E}(X \mid A^c) = 1 + \mathbb{E}(X)$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X \mid A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X \mid A^c) \times \mathbb{P}(A^c)\\ &= 0 \times p + \{1 + \mathbb{E}(X)\} \times (1-p)\\ &= (1-p)(1+\mathbb{E}(X)),\end{aligned}$$

et en résolvant cette équation pour $\mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}(X) = 1/p$.

b) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^k\\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p(1-p)\left\{-\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dp}\right\} = \frac{1-p}{p}.\end{aligned}$$

Exercice 21

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Rappelons que l'entropie de X est donnée par $h(X) = -\sum_{j=1}^n p_j \ln p_j$. Remarquons que $0 \ln 0 = 0$.

a) Calculer $h(X)$ si X est constante.

b) Calculer $h(X)$ si X est équi-distribuée.

c) Trouver l'entropie maximale si le support S_X contient n valeurs.

Solution 21

a) Si X est une variable aléatoire constante, alors elle ne prend qu'une seule valeur x_1 avec probabilité $\mathbb{P}_1 = 1$. Ainsi,

$$h(X) = -1\ln(1) = 0.$$

b) Si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ on a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$h(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = -\ln \frac{1}{n} = \ln n$$

c) On veut maximiser $-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. On utilise les multiplicateurs de Lagrange, donc on trouve les derivées de

$$L = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right),$$

c'est à dire

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 1 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p_i} = -1 - \ln p_i + \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donc $\mathbb{P}_i = \exp(\lambda - 1)$ ne dépend pas de i, et ainsi $\mathbb{P}_i = 1/n$, car $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Les deuxième derivées par rapport aux $\mathbb{P}_i$ étant négatives, cette solution donne bien un maximum de $\ln n$, corréspondant à la loi uniforme de la partie b) de l'exercice.

Sinon, on peut argumenter comme suite. Soit f une fonction réelle définie sur le support S_X à n valeurs. On admet que si f est concave, alors

$$f\left(\frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right) \geq \frac{f(p_1) + \cdots + f(p_n)}{n},\ \forall p_1, \cdots, p_n \in S_X$$

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ par, $f(x) = -x\ln(x)$ Alors f est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et sa dérivée seconde est:

$$f''(x) = -\frac{1}{x} < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_*^+$$

On en déduit que la fonction est concave. On applique l'inégalité de l'énoncé, en multipliant à gauche et à droite par n, avec la fonction f ci-dessus, et les $\mathbb{P}_1, \cdots, p_n$ de la loi de X. Alors

$$h(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \leq nf\left(\frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right)$$

Comme les $\mathbb{P}_1, \cdots, p_n$ définissent une probabilité, on a $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ainsi,

$$h(x) \leq nf(\frac{1}{n}) = -n\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \ln n$$

D'après la question b) le membre de droite correspond à l'entropie d'une variable aléatoire de loi uniforme, on en déduit qu'elle est d'entropie maximale.

SÉRIE 6

Exercice 22

Soient X, Y, Z des variables aléatoires telles que $\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[Z^2] < \infty$. Montrer que

a) $\operatorname{cov}(aX + bY, cZ) = ac\operatorname{cov}(X, Z) + bc\operatorname{cov}(Y, Z)$.

b) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$,
- $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$,
- $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$.

Solution 22

a) D'après la définition de la covariance, et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(aX+bY,cZ) &= \mathbb{E}\Big[(aX+bY-\mathbb{E}[aX+bY])\cdot(cZ-\mathbb{E}[cZ])\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[acXZ - a\mathbb{E}[cZ]X + bcYZ - b\mathbb{E}[cZ]Y - \mathbb{E}[aX+bY]cZ + \mathbb{E}[aX+bY]\mathbb{E}[cZ]\Big]\\
&= ac\mathbb{E}[XZ] - ac\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] + bc\mathbb{E}[YZ] - bc\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z]\\
&\quad - \mathbb{E}[aX+bY]\mathbb{E}[cZ] + \mathbb{E}[aX+bY]\mathbb{E}[cZ]\\
&= ac\Big(\mathbb{E}[XZ]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z]\Big) + bc\Big(\mathbb{E}[YZ]-\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z]\Big)\\
&= ac\mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Z-\mathbb{E}[Z])\Big] + bc\mathbb{E}\Big[(Y-\mathbb{E}[Y])(Z-\mathbb{E}[Z])\Big]\\
&= ac\operatorname{cov}(X,Z) + bc\operatorname{cov}(Y,Z).
\end{aligned}$$

$\operatorname{cov}(aX+bY,cZ) = ac\operatorname{cov}(X,Z) + bc\operatorname{cov}(Y,Z)$.

b) D'après la définition de la covariance, et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]\\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y]] - \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{cov}(X,Y)=0 \iff \mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Par ailleurs, par définition de la variance :

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X+Y) &= \mathbb{E}\Big[\Big(X+Y-\mathbb{E}[X+Y]\Big)^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\{X-\mathbb{E}[X]\}+\{Y-\mathbb{E}[Y]\}\Big)^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(X-\mathbb{E}[X]\Big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(Y-\mathbb{E}[Y]\Big)^2\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\{X-\mathbb{E}[X]\}\{Y-\mathbb{E}[Y]\}\Big]\\
&= \operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y) \iff \operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Exercice 23

On tire successivement avec remise deux boules d'une urne contenant trois boules numérotées respectivement 2, 3 et 4. Soient X_1 la somme des numéros et X_2 le produit des numéros.

a) Quelle est la fonction de densité conjointe de (X_1,X_2) ?

b) Quelles sont les fonctions de densité marginales de X_1 et X_2 ?

Solution 23

a) Remarquons d'abord que l'espace de probabilité est $(\Omega,\mathcal{F},P)$, où $\Omega=\{2,3,4\}^2, \mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$ et la fonction de probabilité $\mathbb{P}$ est déterminée par $\mathbb{P}\{\omega\}=\frac{1}{9}$, pour tout $\omega\in\Omega$. Le vecteur aléatoire (X_1,X_2) est défini par $(X_1(\omega), X_2(\omega)) = (\omega_1 + \omega_2, \omega_1\omega_2)$, où $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. L'ensemble des valeurs possibles pour la v.a. X_1 est $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ et l'ensemble des valeurs possibles pour X_2 est $\{4, 6, 8, 9, 12, 16\}$. Nous remarquons que les couples de valeurs possibles sont en correspondance biunivoque avec les couples de valeurs obtenues lors du tirage, à la symétrie du tirage près. Ainsi, les valeurs possibles $(4, 4), (6, 9)$ et $(8, 16)$ pour (X_1, X_2) correspondent respectivement au tirage de $(2, 2)$, $(3, 3)$ et $(4, 4)$. Elles ont donc probabilité $\frac{1}{9}$. Les valeurs possibles $(5, 6), (6, 8)$ et $(7, 12)$ pour (X_1, X_2) correspondent respectivement au tirage de $(2, 3), (2, 4)$ et $(3, 4)$ (à la symétrie des tirages près). Elles ont donc probabilité $\frac{2}{9}$. Les autres couples de valeurs ne sont pas possibles et ont donc tous probabilité 0.

b) Afin de déterminer la densité marginale de X_1, il s'agit d'additionner les probabilités de tous les événements pour lesquels X_1 prend la valeur voulue. Les résultats obtenus aux points a) et b) sont résumés dans le tableau suivant. Les valeurs centrales indiquent $f(x_1, x_2)$. La fonction f_{X_1} (resp. f_{X_2}) est présentée dans la dernière colonne (resp. ligne).

$x_1 \mid x_2$	4	6	8	9	12	16	$f_{x_1}(x_1)$
4	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
5	0	$\frac{2}{9}$	0	0	0	0	$\frac{2}{9}$
6	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{3}{9}$
7	0	0	0	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
8	0	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$f_{X_2}(x_2)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	

Exercice 24

Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire continu ayant pour fonction de densité

$$f(x1, x2) = \begin{cases} c(x1 + x2) & \text{si } (x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Que vaut c ?

b) Calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.

c) Quelle est la fonction de densité marginale de X_1 ?

d) Que vaut $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$?

Solution 24

a) Nous devons choisir c de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\ &= c\int_0^1 \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2 = c\int_0^1 \left[\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2\right]_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \\ &= c\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_2\right) dx_2 = c\left[\frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = c \end{aligned}$$

Ainsi, $c = 1$.

b) Observons que

$$\begin{aligned}
&P\{X_1 < X_2\} \\
&= \iint_{\{(x_1,x_2):x_1<x_2\}} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^{x_2} (x_1+x_2)\,dx_1dx_2 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x_1^2}{2} + x_1x_2\right]_{x_1=0}^{x_1=x_2} dx_2 = \frac{3}{2}\int_0^1 x_2^2 dx_2 = \frac{3}{2}\left[\frac{x_2^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Pour $x_1 \notin [0,1]$, $f_{X_1}(x_1) = 0$. Pour $x_1 \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_2 \\
&= \int_0^1 (x_1+x_2)\,dx_2 = \left[x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + x_1
\end{aligned}$$

d) Nous pouvons écrire $\mathbb{P}\{X_1 = X_2\}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
P\{X_1 = X_2\} &= \iint_{\{(x_1,x_2):x_1=x_2\}} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_2}^{x_2} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = 0
\end{aligned}$$

pour toute fonction de densité f. Ainsi, $\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = 0$ pour tout vecteur aléatoire continu.

Exercice 25

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a. continues i.i.d. avec fonction de densité f. Montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = \frac{1}{n!}.$$

Solution 25

Notons F la fonction de répartition commune des v.a. $X_1, \ldots, X_n$. La fonction de densité conjointe de $X_1, \ldots, X_n$ est donc $f(x_1)\cdots f(x_n)$. Calculons alors la probabilité cherchée :

$$
\begin{aligned}
&P\left\{X_1 < \cdots < X_n\right\} \\
&= \int_{\{x_1<\cdots<x_n\}} f\left(x_1\right)\cdots f\left(x_n\right) dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f\left(x_n\right) \int_{-\infty}^{x_n} dx_{n-1} f\left(x_{n-1}\right)\cdots \int_{-\infty}^{x_3} dx_2 f\left(x_2\right) \int_{-\infty}^{x_2} dx_1 f\left(x_1\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f\left(x_n\right) \int_{-\infty}^{x_n} dx_{n-1} f\left(x_{n-1}\right)\cdots \int_{-\infty}^{x_3} dx_2 f\left(x_2\right) F\left(x_2\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f\left(x_n\right) \int_{-\infty}^{x_n} dx_{n-1} f\left(x_{n-1}\right)\cdots \int_{-\infty}^{x_4} dx_3 f\left(x_3\right) \left[\frac{F^2\left(x_2\right)}{2}\right]_{-\infty}^{x_3} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f\left(x_n\right) \int_{-\infty}^{x_n} dx_{n-1} f\left(x_{n-1}\right)\cdots \int_{-\infty}^{x_4} dx_3 f\left(x_3\right) \frac{F^2\left(x_3\right)}{2} \\
&\vdots \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f\left(x_n\right) \frac{F^{n-1}\left(x_n\right)}{(n-1)!} = \left[\frac{F^n\left(x_n\right)}{n!}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

et le résultat est démontré.

Exercice 26

Trouver les fonctions de densité de

a) $W = \max(U_1, \ldots, U_n)$ quand $U_1, \ldots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$;

b) $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$ quand $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$.

Solution 26

a) Soit $W = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $U_1, \ldots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$;
La fonction de répartition de W est:

$$
\begin{aligned}
F_W(w) = \Pr(W \leq w) &= \Pr(\max(U_1, \ldots, U_n) \leq w) \\
&= \Pr(U_1 \leq w, \ldots, U_n \leq w) \\
&= \Pr(U_1 \leq w) \times \ldots \times \Pr(U_n \leq w) \\
&= \Pr(U_1 \leq w)^n = F_{U_1}(w)^n = w^n, \text{pour } 0 \leq w \leq 1.
\end{aligned}
$$

La fonction de densité de W est ainsi:

$$
f_W(w) = \begin{cases} nw^{n-1}, & 0 \leq w \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}
$$

b) Soit $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$.

La fonction de répartition de V est:

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= \Pr(\min(X_1,\ldots,X_n) \le v) \\
&= 1 - \Pr(\min(X_1,\ldots,X_n) \ge v) \\
&= 1 - \Pr(X_1 \ge v, \ldots, X_n \ge v) \\
&= 1 - \Pr(X_1 \ge v) \times \ldots \times \Pr(X_n \ge v) \\
&= 1 - \Pr(X_1 \ge w)^n = 1 - \big(1 - F_{X_1}(v)\big)^n \\
&= 1 - e^{-n\lambda v}.
\end{aligned}$$

Donc $V \sim \exp(n\lambda)$, et sa fonction de densité est

$$f_V(v) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda v}, & 0 \le v, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

SÉRIE 7

Exercice 27

La *corrélation* de deux variables aléatoires X and Y de variances positives est définit comme

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)\}^{1/2}}.$$

Soient a, b, c, d des constantes réeles.

(a) Calculer $\operatorname{var}(a + bX + cY)$ et démontrer que $|\operatorname{corr}(X,Y)| \le 1$, avec égalité si et seulement si il existe une relation linéaire entre X et Y.

(b) Démontrer que $\operatorname{cov}(a + bX, c + dY) = bd\operatorname{cov}(X,Y)$, et ainsi déduire que

$$\operatorname{corr}(a + bX, c + dY) = \operatorname{sign}(bd)\operatorname{corr}(X,Y).$$

(c) Les temperatures journalières moyennes (°F) à New York et Chicago ont pour corrélation 0.6. Donner la corrélation entre les moyennes correspondantes en Celsius. Que pouvez-vous dire des covariances?

Solution 27

(a) Puisque a, b, c sont des constantes,

$$\operatorname{var}(a + bX + cY) = b^2\operatorname{var}(X) + 2bc\operatorname{cov}(X,Y) + c^2\operatorname{var}(Y) \ge 0.$$

Soit $c = 1$ et notons que nous avons une équation quadratique $b^2\operatorname{var}(X) + 2b\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y) > 0$, ce qui implique que $\{2\operatorname{cov}(X,Y)\}^2 < 4\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)$, ou $corr(X,Y)^2 \le 1$, ou $-1 \le \operatorname{corr}(X,Y) \le 1$.

De plus $\operatorname{var}(a + bX + cY) = 0$ si et seulement si $a + bX + cY$ est une constante avec probabilité 1. (Théorème 59), donc $\mathbb{P}(a + bX + cY = d) = \mathbb{P}(cY = d - a - bX) = 1$ pour certains d, qui signifie que (X,Y) sont linéairement liés.

(b) La covariance est

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(a + bX, c + dY) &= \mathbb{E}\left[\{a + bX - \mathbb{E}(a + bX)\}\{c + dY - \mathbb{E}(c + dY)\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[b\{X - \mathbb{E}(X)\}\, d\{Y - \mathbb{E}(Y)\}\right] \\
&= bd\operatorname{cov}(X,Y),
\end{aligned}$$

et puisque $\mathrm{var}(a+bX) = b^2\,\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(c+dY) = d^2\,\mathrm{var}(Y)$, on a

$$\mathrm{corr}(a+bX, c+dY) = \frac{\mathrm{cov}(a+bX, c+dY)}{\{\mathrm{var}(a+bX)\,\mathrm{var}(c+dY)\}^{1/2}} = \frac{bd\,\mathrm{cov}(X,Y)}{\{b^2\,\mathrm{var}(X) d^2\,\mathrm{var}(Y)\}^{1/2}} = \mathrm{sign}(bd)\mathrm{corr}(X,Y).$$

(c) La partie (b) nous montre que la corrélation est sans dimension, donc la relation linéaire monotone croissante qui relie les deux échelles de température $f = 32 + 1.8c$, et son inverse $c = (f-32)/18$, laisse la corrélation inchangée ; elle est 0.6 sur les deux échelles de température.

Nous ne connaissons pas les variances donc nous ne sommes pas en mesure de calculer les covariances, mais nous pouvons dire qu'elles sont liées par l'expression $\mathrm{cov}_f = 1.8^2\,\mathrm{cov}_c$.

Exercice 28

(a) Soient $A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, trouver la fonction de densité de la racine de $A + Bx = 0$.

(b) Soient $B, C \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, trouver la probabilité que $x^2 + Bx + C = 0$ ait deux racines réelles.

Solution 28

(a) La racine de l'équation est $X = -A/B$. Soit $Y = B$. Nous allons transformer la densité conjointe de (A,B) en celle de (X,Y) et ensuite trouver la densité marginale de X. Utilisons la slide 151, avec

$$\begin{cases} x = g_1(a,b) = -a/b, \\ y = g_2(a,b) = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = h_1(x,y) = -xy, \\ b = h_2(x,y) = y, \end{cases}$$

donnant

$$|J(a,b)|_{a=-xy,b=y} = \left| \begin{pmatrix} -1/b & a/b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{a=-xy,b=y} = |1/y|,$$

et puisque $|J| > 0$ partout dans $\mathbb{R}^2$, la densité conjointe de (X,Y) est

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{A,B}(a,b)|J(a,b)|^{-1}_{a=-xy,b=y} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-a^2/2-b^2/2} \times |y| = \frac{|y|}{2\pi} e^{-y^2(1+x^2)/2}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la densité marginale de X est (la densité de Cauchy)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} y e^{-y^2(1+x^2)/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) (B,C) sont indépendants et ont chacun la distribution $U(0,1)$, de sorte que leur densité conjointe est la suivante

$$f_{B,C}(b,c) = \begin{cases} 1, & 0 < b,c < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Il y aura deux racines réelles si $B^2 > 4C$ ou équivalent à $1 > B > 2\sqrt{C} > 0$,

$$\mathbb{P}(B > 2\sqrt{C}) = \int\int_{\{(b,c):b>2\sqrt{c}\}} f_{B,C}(b,c)\,\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int_0^{1/4} \mathrm{d}c \int_{2\sqrt{c}}^{1} \mathrm{d}b\, 1 = \int_0^{1/4} \mathrm{d}c\,(1 - 2\sqrt{c}) = 1/12.$$

Exercice 29

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire discret dans $\mathbb{R}^2$ dont la fonction de densité conjointe est

$$\mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \binom{n}{x}\binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y},$$

pour $x, y \in \{0, \ldots, n\}$ avec $x + y \leqslant n$ (loi multinomiale).

(a) Déterminer la fonction de densité marginale de X.

(b) Montrer que les fonctions de densité conditionnelles $\mathbb{P}\{Y = y \mid X = x\}$ et $\mathbb{P}\{X = x \mid Y = y\}$ sont des densités binomiales dont on déterminera les paramètres.

(c) Calculer $\mathbb{E}[Y \mid X = x]$ et $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$.

(d) Trouver $\mathbb{E}[Y \mid X]$ et $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

(e) Calculer $\mathbb{P}\{\mathbb{E}[X \mid Y] = 0\}$.

Solution 29

(a) La densité marginale de la v.a. X est

$$\begin{aligned} P\{X = x\} &= \sum_{y=0}^{n-x} P\{X = x, Y = y\} \\ &= \binom{n}{x} p^x \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n-x}{y} q^y (1-p-q)^{n-x-y} \\ &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

pour $x = 0, \ldots, n$.

(b) Nous en déduisons que, pour $x \in \{0, \ldots, n\}$ fixé,

$$\begin{aligned} P\{Y = y \mid X = x\} &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{X = x\}} \\ &= \frac{\binom{n}{x}\binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}}{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}} \\ &= \binom{n-x}{y} \left(\frac{q}{1-p}\right)^y \left(1 - \frac{q}{1-p}\right)^{n-x-y} \end{aligned}$$

pour $y = 0, \ldots, n-x$. Ainsi, la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une densité binomiale de paramètres $n - x$ et $\frac{q}{1-p}$. Remarquons que $\binom{n}{x}\binom{n-x}{y} = \binom{n}{y}\binom{n-y}{x}$. Ainsi, le problème est symétrique en x et y et un raisonnement analogue nous montre que $\mathbb{P}\{X = x \mid Y = y\}$ est une densité binomiale de paramètres $n - y$ et $\frac{p}{1-q}$.

(c) D'après le résultat du point b), nous pouvons utiliser la formule pour l'espérance d'une v.a. binomiale, ce qui donne

$$E[Y \mid X = x] = (n-x)\frac{q}{1-p} \quad \text{et} \quad E[X \mid Y = y] = (n-y)\frac{p}{1-q}$$

d) Au point c), nous avons calculé $\varphi(x) = E[Y \mid X = x]$. Nous en déduisons que $\mathbb{E}[Y \mid X] = \varphi(X) = \frac{q}{1-p}(n - X)$. Un raisonnement analogue nous donne $\mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{p}{1-q}(n - Y)$.

(e) Par le point d), nous savons que $\mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{p}{1-q}(n-Y)$. De plus, par le point a), Y suit une loi binomiale de paramètres n et q. Ainsi,

$$P\{E[X \mid Y] = 0\} = P\left\{\frac{p}{1-q}(n - Y) = 0\right\} = P\{Y = n\} = q^n.$$

Exercice 30

Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes, où X_1 et X_2 sont des v.a. de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Posons $Z = X_1 + X_2$.
(a) Trouver $\mathbb{P}\{X_2 = x_2, Z = z\}$ et $\mathbb{P}\{X_2 = x_2 \mid Z = z\}$.
(b) En déduire $\mathbb{E}[X_2 \mid Z = z]$ et $\mathbb{E}[X_2 \mid Z]$.
(c) Calculer $\mathbb{P}\left\{E[X_2 \mid Z] \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right\}$.

Solution 30

(a) La v.a. $Z = X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Calculons la densité conjointe de (X_2, Z).

$$\begin{aligned} P\{X_2 = x_2, Z = z\} &= P\{X_2 = x_2, X_1 + X_2 = z\} \\ &= P\{X_2 = x_2, X_1 = z - x_2\} \\ &= P\{X_2 = x_2\} P\{X_1 = z - x_2\} \\ &= e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{z-x_2}}{(z-x_2)!} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &P\{X_2 = x_2 \mid Z = z\} \\ &= \frac{e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{z-x_2}}{(z-x_2)!}}{e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}} = \binom{z}{x_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{z-x_2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la densité conditionnelle $\mathbb{P}\{X_2 = x_2 \mid Z = z\}$ est la densité d'une v.a. binomiale de paramètres z et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.
(b) En utilisant l'espérance d'une v.a. binomiale, nous obtenons $\varphi(z) = E[X_2 \mid Z = z] = \frac{\lambda_2 z}{\lambda_1+\lambda_2}$, d'où $\mathbb{E}[X_2 \mid Z] = \varphi(Z) = \frac{\lambda_2 Z}{\lambda_1+\lambda_2}$. c) Par le point b), nous savons que $\mathbb{E}[X_2 \mid Z] = \frac{\lambda_2 Z}{\lambda_1+\lambda_2}$. De plus, Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P\left\{E[X_2 \mid Z] \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right\} &= P\left\{\frac{\lambda_2 Z}{\lambda_1+\lambda_2} \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right\} \\ &= P\{Z \leqslant 1\} = (1 + \lambda_1 + \lambda_2)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \end{aligned}$$

SÉRIE 8

Exercice 31

Si $Y \sim N(\mu_{p\times 1}, \Sigma_{p\times p})$, montrer que :

(a) $M_Y(u) = \exp\{u^\top \mu + \frac{1}{2} u^\top \Sigma u\}$

(b) $AY \perp BY \iff A\Sigma B^\top = 0$.

Solution 31

(a) On a

$$M_Y(u) = \mathbb{E}\big[e^{u^\top Y}\big] = M_{u^\top Y}(1).$$

Il suffit donc de calculer la MGF de la variable scalaire $u^\top Y$. Or, toute forme linéaire d'un vecteur gaussien est gaussienne : la variable scalaire $X := u^\top Y$ suit une loi normale

$$X \sim \mathcal{N}\big(u^\top \mu,\ u^\top \Sigma u\big),$$

car $\mathbb{E}[u^\top Y] = u^\top \mu$ et $\mathrm{Var}(u^\top Y) = u^\top \Sigma u$. La MGF d'une loi normale scalaire $\mathcal{N}(m, s^2)$ est

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \exp\Big(tm + \tfrac{1}{2}t^2 s^2\Big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

En appliquant ceci à $X = u^\top Y$ avec $t = 1$, $m = u^\top \mu$ et $s^2 = u^\top \Sigma u$, on obtient

$$M_{u^\top Y}(1) = \exp\Big(u^\top \mu + \tfrac{1}{2}u^\top \Sigma u\Big).$$

(b) Pour $u \in \mathbb{R}^r$ et $v \in \mathbb{R}^s$ la MGF conjointe de (U, V) est

$$M_{(U,V)}(u, v) = \mathbb{E}\big[e^{u^\top U + v^\top V}\big] = \mathbb{E}\big[e^{(A^\top u + B^\top v)^\top Y}\big].$$

D'après la partie (a),

$$\begin{aligned} M_{(U,V)}(u, v) &= \exp\Big((A^\top u + B^\top v)^\top \mu + \tfrac{1}{2}(A^\top u + B^\top v)^\top \Sigma (A^\top u + B^\top v)\Big) \\ &= \exp\Big(u^\top A\mu + v^\top B\mu + \tfrac{1}{2}u^\top A\Sigma A^\top u + u^\top A\Sigma B^\top v + \tfrac{1}{2}v^\top B\Sigma B^\top v\Big) \end{aligned}$$

Or, U et V sont indépendants si et seulement si $M_{(U,V)}(u, v) = M_U(u)M_V(v)\,\forall u, v$. Or

$$M_U(u)M_V(v) = \exp\big(u^\top A\mu + \tfrac{1}{2}u^\top A\Sigma A^\top u\big) \cdot \exp\big(v^\top B\mu + \tfrac{1}{2}v^\top B\Sigma B^\top v\big).$$

On en déduit

$$M_{(U,V)}(u, v) = M_U(u)M_V(v)\ \ \forall u, v \iff u^\top A\Sigma B^\top v = 0\ \ \forall u \in \mathbb{R}^r,\ v \in \mathbb{R}^s \iff A\Sigma B^\top = 0.$$

Exercice 32

Soit X une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à k degrés de liberté, notée $X \sim \chi^2_k$.

(a) Prouver que la fonction génératrice des moments (mgf) de X est

$$M_X(t) = \mathbb{E}\big[e^{tX}\big] = (1 - 2t)^{-k/2}, \qquad \text{pour } t < \tfrac{1}{2}.$$

(b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}[X]$ et la variance $\mathrm{Var}(X)$.

Solution 32

(a) Écrivons $X = \sum_{i=1}^k Z_i^2$ où $Z_1, \ldots, Z_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées comme $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors, pour $t < \frac{1}{2}$,

$$M_X(t) = \mathbb{E}\big[e^{tX}\big] = \mathbb{E}\Big[e^{t\sum_{i=1}^k Z_i^2}\Big] = \prod_{i=1}^k \mathbb{E}\big[e^{tZ_i^2}\big] = \big(\mathbb{E}\big[e^{tZ^2}\big]\big)^k,$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. De plus,

$$\mathbb{E}[e^{tZ^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2 - t)z^2}\, dz.$$

Cette intégrale convergere si et seulement si $1/2 - t > 0$, c'est-à-dire $t < \frac{1}{2}$. Dans ce cas :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2-t)z^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{1-2t}} = (1-2t)^{-1/2}.$$

Ainsi $M_{Z^2}(t) = (1-2t)^{-1/2}$ et donc

$$M_X(t) = \big((1-2t)^{-1/2}\big)^k = (1-2t)^{-k/2}, \qquad t < \tfrac{1}{2}.$$

(b) On utilise les dérivées de la MGF en $t = 0$. Posons

$$M_X(t) = (1-2t)^{-k/2}.$$

La première dérivée est

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}(1-2t)^{-k/2} = \big(-\tfrac{k}{2}\big)(1-2t)^{-k/2-1} \cdot (-2) = k(1-2t)^{-k/2-1}.$$

D'où $\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = k$.

La seconde dérivée est

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}\big(k(1-2t)^{-k/2-1}\big) = k\big(-\tfrac{k}{2}-1\big)(1-2t)^{-k/2-2} \cdot (-2) = k(k+2)(1-2t)^{-k/2-2}.$$

Donc $M_X''(0) = k(k+2)$.

La variance s'obtient par

$$\mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - \big(M_X'(0)\big)^2 = k(k+2) - k^2 = 2k.$$

Exercice 33

Pour $\lambda > 0$ fixé, soit pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire X_n de loi géométrique (nombre d'échecs avant le premier succès) de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. On pose $Y_n = X_n/n$. Montrer que $Y_n \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Solution 33

Pour $t < 0$ on a $\mathbb{P}(Y_n \leq t) = 0 = F(t)$. Pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \leq t) &= \mathbb{P}\big(X_n \leq \lfloor nt \rfloor\big) = 1 - \mathbb{P}\big(X_n > \lfloor nt \rfloor\big) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor} = 1 - \exp\left(\lfloor nt \rfloor \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Or $\ln(1-x) = -x + o(x)$ lorsque $x \to 0$, donc

$$\lfloor nt \rfloor \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \to -\lambda t \quad (n \to \infty),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = F(t).$$

Comme F est continue, cela implique $Y_n \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Exercice 34

Let $X_1, X_2, X_3, \ldots$ be a sequence of i.i.d. Uniform$(0,1)$ random variables. Define the sequence Y_n as

$$Y_{\mathrm{n}} = \min\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right).$$

Prove the following convergence results independently (i.e, do not conclude the weaker convergence modes from the stronger ones).

(a) $Y_n \xrightarrow{d} 0$

(b) $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

(c) $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$.

Solution 34

(a) $Y_n \xrightarrow{d} 0$: Note that

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

For $0 \le y \le 1$, we can write

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P\left(Y_n \le y\right) \\ &= 1 - P\left(Y_n > y\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > y, X_2 > y, \cdots, X_n > y\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > y\right) P\left(X_2 > y\right) \cdots P\left(X_n > y\right) \qquad \text{(since } X_i\text{'s are independent)} \\ &= 1 - \left(1 - F_{X_1}(y)\right)\left(1 - F_{X_2}(y)\right) \cdots \left(1 - F_{X_n}(y)\right) \\ &= 1 - (1-y)^n. \end{aligned}$$

Therefore, we conclude

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

Therefore, $Y_n \xrightarrow{d} 0$.

(b) $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$: Note that as we found in part (a)

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - (1-y)^n & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

In particular, note that Y_n is a continuous random variable. To show $Y_n \xrightarrow{p} 0$, we need to show that

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n| \ge \epsilon\right) = 0, \qquad \text{for all } \epsilon > 0$$

Since $Y_n \ge 0$, it suffices to show that $\lim_{n\to\infty} P\left(Y_n \ge \epsilon\right) = 0$, for all $\epsilon > 0$. For $\epsilon \in (0,1)$, we have

$$\begin{aligned} P\left(Y_n \ge \epsilon\right) &= 1 - F_{Y_n}(\epsilon) \\ &= (1-\epsilon)^n \end{aligned}$$

Therefore, $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty}(1-\epsilon)^n = 0,$ for all $\epsilon \in (0,1]$.

(c) $Y_n \xrightarrow{\text{a.s}} 0$: We will prove

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \epsilon) < \infty$$

which implies $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. By our discussion in part (b),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \epsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon)^n \\ &= \frac{1-\epsilon}{\epsilon} < \infty \quad \text{(geometric series).}\end{aligned}$$

SÉRIE 9

Exercice 35

Soient $\{X_j\}$ des variables aléatoires indépendantes d'espérance μ et de variance finie σ^2, soit $\bar{X} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j$, et soit g une fonction dérivable telle que $g'(\mu) \neq 0$.

(a) Donner la loi approchée de $Z_n = (\bar{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$, et ainsi montrer que

$$g(\bar{X}) = g(\mu + \sigma Z_n/n^{1/2}) \,\dot\sim\, \mathcal{N}\{g(\mu), \sigma^2 g'(\mu)^2/n\}$$

pour n grand.

(b) Trouver la loi approchée de $2\bar{X}^{1/2}$ quand les X_j suivent une loi de Poisson.

(c) Trouver la loi approchée de $1/\bar{X}$ quand X_j suivent une loi gaussiènne. Attention au cas $\mu = 0$!

Solution 35

a) La démonstration de ce résultat est assez simple sous l'hypothèse que $g(x)$ est derivable et $g'(\mu) \neq 0$. D'après le théorème central limite, la distribution de $\bar{X}$ est approximativement normale $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ c'est à dire

$$Z_n = (\bar{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n} \quad \dot\sim \quad \mathcal{N}(0,1).$$

Ensuite, le théorème de la valeur moyenne (c'est à dire l'approximation du premier ordre d'une série de Taylor) donne

$$g(\bar{X}) \doteq g(\mu) + g'(\mu)(\bar{X} - \mu).$$

Réarranger les termes donne

$$\sqrt{n}\frac{g(\bar{X}) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma} \doteq \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}.$$

étant donné que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \quad \xrightarrow{D} \quad \mathcal{N}(0,1)$$

par hypothèse, il en résulte immédiatement que

$$\sqrt{n}\frac{g(\bar{X}) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma} \quad \xrightarrow{D} \quad \mathcal{N}(0,1),$$

et ainsi que

$$\mathbb{P}\left\{\sqrt{n}\frac{g(\bar{X})-g(\mu)}{g'(\mu)\sigma}\leq x\right\}\doteq\Phi(x),$$

ou, autrement dit,

$$g(\bar{X})=g(\mu+\sigma Z_n/n^{1/2})\ \dot{\sim}\ \mathcal{N}\{g(\mu),\sigma^2 g'(\mu)^2/n\}$$

pour n grand.

b) Quand X_i suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, $\mathbb{E}(X_i)=\lambda$ et $\mathrm{var}(X_i)=\lambda$. Alors, $\bar{X}\sim\mathcal{N}(\lambda,\lambda/n)$ En utilisant a) pour $g(x)=2x^{1/2}$ qui est une fonction derivable et $g'(\mu)=\lambda^{1/2}\neq 0$, on obtient

$$2\sqrt{n}\{\bar{X}^{1/2}-\mu^{1/2}\}\quad\xrightarrow{D}\quad\mathcal{N}(0,1)$$

c) Quand X_i suivent une loi gaussiènne alors $\bar{X}\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2/n)$ et pour $g(x)=1/x$ qui est une fonction derivable et $g'(\mu)=-1/\mu^2\neq 0$ pour $\mu\neq 0$, on obtient

$$\sqrt{n}\{1/\bar{X}-1/\mu\}\xrightarrow{D}\mathcal{N}(0,\sigma^2/\mu^4).$$

Si $\mu=0$, la loi asymptotique met probabilité 0.5 sur $\pm\infty$, car, pour tout $y<0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1/\bar{X}<y) &= \mathbb{P}(1/\bar{X}<y\mid\bar{X}>0)\mathbb{P}(\bar{X}>0)+\mathbb{P}(1/\bar{X}<y\mid\bar{X}\leq 0)\mathbb{P}(\bar{X}\leq 0)\\
&= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(1/\bar{X}<y\mid\bar{X}\leq 0)\\
&= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(\bar{X}>1/y\mid\bar{X}\leq 0)\\
&= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(1/y<\bar{X}\leq 0)/\mathbb{P}(\bar{X}\leq 0)\\
&= \tfrac{1}{2}\times 2\left[1/2-\Phi\{\sqrt{n}/(y\sigma)\}\right]\to\tfrac{1}{2},\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Puisque la loi de $1/\bar{X}$ est symétrique autour de zéro, $\mathbb{P}(1/\bar{X}>y)\to 1/2$ pour tout $y>0$.

Exercice 36

Sous les hypothèses du théorème central limite, posons $Z_n=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n-\mu)$. Supposons qu'il existe $t_0>0$ tel que $\mathbb{E}[e^{tX_1}]<\infty$ pour tout $t\in]-t_0,t_0[$.

Montrer que pour tout $t\geq 0$, $\lim_{n\to\infty}M_{Z_n}(t)=M_Z(t)$ où $Z\sim N(0,1)$.

Solution 36

Traitons tout d'abord le cas où $\mu=0$. Dans ce cas, $Z_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$. Ainsi, pour $t\geqslant 0$,

$$M_{Z_n}(t)=E\left[e^{tZ_n}\right]=\prod_{i=1}^n E\left[e^{\frac{tX_i}{\sigma\sqrt{n}}}\right]=\prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\left(M_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Or, pour $t\in]-t_0,t_0[$, en effectuant un développement limité autour de 0 ,

$$\begin{aligned}
M_{X_1}(t)&=M_{X_1}(0)+M'_{X_1}(0)t+M''_{X_1}(0)\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\\
&=1+E\left[X_1\right]t+E\left[X_1^2\right]\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)=1+\frac{\sigma^2t^2}{2}+o\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

Soit $t\geqslant 0$ fixé et soit n suffisamment grand pour que $\frac{|t|}{\sigma\sqrt{n}}<t_0$. Alors,

$$M_{Z_n}(t)=\left(1+\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n$$

et donc

$$\lim_{n\to 0} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

avec Z une v.a. de loi $N(0,1)$. Dans le cas où $\mu \neq 0$, on pose $Y_i = X_i - \mu$ pour tout $i \geqslant 0$. Les v.a. Y_i vérifient les hypothèses de l'énoncé. De plus, $E[Y_i] = 0$ et $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$. Ainsi, par la première partie de l'exercice, nous avons bien

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t),$$

pour tout $t \geqslant 0$.

Exercice 37

(a) Soit X une v.a. binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 1/2$. A l'aide de l'égalité $\mathbb{P}\{X = 50\} = \mathbb{P}\{49,5 < X < 50,5\}$ et du théorème central limite, estimer $\mathbb{P}\{X = 50\}$.

(b) Un dé est jeté 200 fois de suite. Estimer la probabilité que la somme des nombres obtenus se situe dans l'intervalle $[650, 750]$.

Solution 37

a) La v.a. X peut s'écrire $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, où les X_i sont des v.a. i.i.d suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$. Nous avons $E[X_i] = p = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{Var}(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{4}$. Ainsi, en appliquant le théorème limite central, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&P\{49,5 < X < 50,5\} \\
&= P\left\{\frac{49,5 - 100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 100}} \leqslant \frac{X - 100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 100}} \leqslant \frac{50,5 - 100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 100}}\right\} \\
&\simeq P\{-0,1 < Z < 0,1\} = 2\Phi(0,1) - 1 = 2\times 0,5398 - 1 = 0,0796
\end{aligned}$$

où Z est une v.a. $N(0,1)$ et Φ est sa fonction de répartition. Nous pouvons alors estimer $P\{X = 50\}$ par 0,0796 .

b) La somme Y des résultats obtenus peut s'écrire $Y = \sum_{i=1}^{200} Y_i$, où les Y_i sont des v.a. i.i.d suivant chacune une loi représentant le résultat du jet d'un dé (c.-à-d. elles sont uniformes sur $\{1, \ldots, 6\}$). Nous avons $E[Y_i] = \frac{7}{2}$ et $\mathrm{Var}(Y_i) = \frac{35}{12}$. Nous cherchons à calculer $P\{650 \leqslant Y \leqslant 750\}$. Calculons tout d'abord la probabilité cherchée sans la correction de continuité. Nous obtenons, par le théorème limite central,

$$\begin{aligned}
P\{650 \leqslant Y \leqslant 750\} &= P\left\{\frac{650 - 200\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{200}} \leqslant \frac{Y - 200\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{200}} \leqslant \frac{750 - 200\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{200}}\right\} \\
&\simeq P\left\{-\frac{1}{7}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{7}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7}\right\} \\
&= 2\Phi(2,07) - 1 = 2\times 0,9808 - 1 = 0,9616
\end{aligned}$$

où Z est une v.a. $N(0,1)$ et Φ est sa fonction de répartition.

Lorsque nous considérons la correction de continuité, nous utilisons l'égalité $P\{650 \leqslant Y \leqslant 750\} = P\{649,5 \leqslant Y \leqslant 750,5\}$. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&P\{649,5 \leqslant Y \leqslant 750,5\}\\
&= P\left\{\frac{649,5 - 200\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{200}} \leqslant \frac{Y - 200\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{200}} \leqslant \frac{750,5 - 200\cdot\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{200}}\right\}\\
&\simeq P\left\{-\frac{1,01}{7}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7} \leqslant Z \leqslant \frac{1,01}{7}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7}\right\}\\
&= 2\Phi(2,09) - 1 = 2\times 0,9817 - 1 = 0,9634
\end{aligned}
$$

où Z est une v.a. $N(0,1)$ et Φ est sa fonction de répartition. Ainsi, nous constatons que lorsque l'on lance 200 fois un dé, le résultat se trouve proche de 700 avec une grande probabilité.

Exercice 38

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}\{S_n/n < 0.51\} \geq 0.84$.

Solution 38

Les v.a. X_i suivent chacune une loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi, $E\left[X_1\right] = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Var}\left(X_1\right) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$. Par le théorème limite central, nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
P\left\{\frac{S_n}{n} < 0,51\right\} = P\left\{S_n < 0,51n\right\} &= P\left\{\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{0,51n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\}\\
&\simeq P\left\{Z < \frac{\frac{n}{100}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\} = \Phi\left(\frac{\sqrt{12n}}{100}\right)
\end{aligned}
$$

où Z est une v.a. $N(0,1)$ et Φ est sa fonction de répartition. Cette probabilité doit être supérieure à 0,84 pour satisfaire la condition souhaitée. D'après la tabelle A. 2 de l'appendice, ce sera le cas si

$$
\frac{\sqrt{12n}}{100} > 1
$$

Cette condition est équivalente à $\sqrt{n} > \frac{100}{\sqrt{12}}$ ou encore $n > \frac{10000}{12} = \frac{2500}{3} = 833{,}3$. Le plus petit entier n tel que la probabilité cherchée est plus grande ou égale à 0,84 est $n = 834$.

SÉRIE 10

Exercice 39

Soient $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,\theta)$, où θ est un paramètre inconnu à estimer.

a) Trouver la fonction de vraisemblance $L(\theta)$.

b) Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$.

   Indication: esquisser le graphe de $\theta \mapsto L(\theta)$ pour un échantillon donné.

c) Montrer que le biais de $\hat{\theta}$ est $b(\theta) = -\theta/(n+1)$. Comment modifier $\hat{\theta}$ afin d'avoir un estimateur non biaisé?

   Indication: le biais est défini par $b(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$.

d) Soit $\tilde{\theta} = 2\bar{X}$ où $\bar{X}$ est la moyenne des X_i. Montrer que $\tilde{\theta}$ est une estimateur non-biasé de θ. Calculer les variances de $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$.

Solution 39

a) La fonction de vraisemblance est définie sur $(\mathbb{R}^+)^n \times \Theta$, où $\Theta :=]0,\infty[$ est l'espace des paramètres.

$$L_{\mathbf{x}}(\theta) = \begin{cases} \theta^{-n} & \text{si } x_i \leq \theta \ \ \forall\, i \leq n \\ 0 & \text{si } \exists\, i \leq n \text{ t.q. } x_i > \theta. \end{cases}$$

b) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ fixé. Si $\theta < \max_{i\leq n} x_i$, alors $L_{\mathbf{x}}(\theta) = 0$. Si $\theta \geq \max_{i\leq n} x_i$, alors $L_{\mathbf{x}}(\theta) = \theta^{-n}$. Il y a donc une discontinuité en $\overline{\theta} = \overline{\theta}(\mathbf{x}) := \max_{i\leq n} x_i$, et on a $\overline{\theta}^{-n} > L_{\mathbf{x}}(\theta) = \theta^{-n}$, pour tous $\theta > \max_{i\leq n} x_i$.
Ainsi, le maximum de $L_{\mathbf{x}}(\theta)$ est atteint en $\overline{\theta}$ et l'estimateur maximum de vraisemblance est $\hat{\theta}(\mathbf{X}) := \max_{i\leq n} X_i$.

c) On a $b(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta}) - \theta = -\theta/(n+1)$. En effet, on a

$$P_\theta(\max_{i\leq n} X_i \leq x) = (P_\theta(X_k \leq x))^n = \frac{x^n}{\theta^n}\mathbb{1}_{]0,\theta[}(x) + \mathbb{1}_{[\theta,\infty[}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

donc

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta n x^n dx = \frac{n}{n+1}\theta\,.$$

Il s'ensuit que $T_1 := \frac{n+1}{n}\hat{\theta}$ est un estimateur non biaisé de θ.

d) On a $E_\theta(X_k) = \theta/2$ donc $2E_\theta(\overline{X}) - \theta = 0$.
On note alors que

$$\operatorname{var}_\theta(\tilde{\theta}) = 4\operatorname{var}_\theta(\overline{X}) = \frac{4}{n}\operatorname{var}_\theta(X_1) = \frac{\theta^2}{3n}\,,$$

car

$$\operatorname{var}_\theta(X_1) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \left(x - \frac{\theta}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \left(x^2 + \frac{\theta^2}{4} - x\theta\right) dx = \frac{\theta^2}{12}\,.$$

Par conséquent $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}$ est meilleur que $2\overline{X}$, puisque

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}_\theta(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}) &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\operatorname{var}_\theta(\hat{\theta}) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[E_\theta(\hat{\theta}^2) - E_\theta(\hat{\theta})^2\right] \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta n x^{n+1}dx - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2\right] \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \\
&< \operatorname{var}_\theta(\tilde{\theta}) = \frac{\theta^2}{3n} \quad \forall\, n > 1\,.
\end{aligned}$$

Exercice 40

Dans la population des ménages d'un pays lointain le montant des économies mensuelles X (exprimées en milliers de maravédis) possède la distribution de densité

$$f(x;\lambda) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0,$$

où λ est inconnu. Un échantillon aléatoire de 400 ménages a moyenne $\bar{x} = 2$ milliers de maravédis.

a) Estimer λ en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

b) Calculer l'information observée.

c) Négligeant l'erreur d'estimation de λ, quel est le pourcentage des familles qui économisent moins de 1000 maravédis par mois?

Solution 40

a) La log-vraisemblance est

$$l(\lambda) = 2n\log(\lambda) + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

donc

$$l'(\lambda) = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}x_i$$

donc $l'(\lambda) = 0$ donne

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{2}{\bar{x}}.$$

D'où, on obtient à partir de $\bar{x}$, l'estimation de λ, $\hat{\lambda} = 1$ (milliers de maravédis)$^{-1}$.

b) On a

$$l''(\lambda) = -\frac{2n}{\lambda^2}$$

donc $J(\lambda) = -l''(\lambda) = \frac{2n}{\lambda^2}$ et $J(\lambda)^{-1/2} = \frac{\lambda}{\sqrt{2n}}$.

c) Si on remplace λ par son estimation, la proportion de familles économisant moins de 1000 maravédis est donc

$$\int_0^1 \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx = \int_0^1 x e^{-x}dx = 1 - 2e^{-1} \simeq 26\%.$$

Exercice 41

On suppose que des émissions radioactives ont lieu à des intervalles indépendants et que l'intervalle de temps entre deux émissions est bien modélisé par une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ inconnu. On mesure n intervalles de temps successifs; l'intervalle de temps du $i$ième intervalle est donné par la valeur d'une variable aléatoire X_i. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ, l'information observée et l'information de Fisher. L'estimateur est-il consistant?

Solution 41

On observe $x_1, \dots, x_n$, une réalisation de $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$. La fonction de vraisemblance est

$$L(\lambda) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j; \lambda) = \lambda^n \exp\left(-\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j\right), \quad \lambda > 0,$$

et ainsi la log-vraisemblance est $\ell(\lambda) = \log L(\lambda) = n(\log\lambda - \lambda\bar{x})$, pour $\lambda > 0$, avec $\bar{x} = n^{-1}\sum x_j$.

On a

$$\ell'(\lambda) = n(1/\lambda - \bar{x}), \quad \ell''(\lambda) = -n/\lambda^2, \quad \lambda > 0.$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance est la solution à l'équation $\ell'(\lambda) = 0$, soit $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$. Puisque $\ell''(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda > 0$, on voit que $\hat{\lambda}$ donne l'unique maximum de ℓ.

L'information observée est $J(\lambda) = -\ell''(\lambda) = n/\lambda^2$. Celle-ci n'est pas aléatoire, et ainsi égale l'information de Fisher: $I(\lambda) = J(\lambda) = n/\lambda^2$.

La loi des grands nombres donne $\bar{X} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X) = 1/\lambda > 0$ quand $n \to \infty$, et puisque la fonction $h(x) = 1/x$ est continue pour $x > 0$,

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{X} \xrightarrow{P} 1/\mathbb{E}(X) = \lambda$$

par le théorème 115 du cours. L'estimateur $\hat{\lambda}$ est donc consistant.

Exercice 42

On suppose que le modèle est identifiable et la vraisemblance est suffisamment régulière pour permettre sa double dérivation sous le signe intégral. Montrer que :

a) $\mathbb{E}_\theta[l'(\theta)] = 0$,

b) $\mathbb{E}_\theta[-l''(\theta)] = \mathbb{E}_\theta[\{l'(\theta)\}^2] = \mathrm{var}[l'(\theta)] \in (0, \infty)$.

Solution 42

On note

$$\ell(\theta; X) = \log f(X;\theta), \qquad \ell'(\theta) = \partial_\theta \ell(\theta; X), \qquad \ell''(\theta) = \partial_\theta^2 \ell(\theta; X),$$

et les espérances $\mathbb{E}_\theta$ sont prises sous $f(\cdot;\theta)$.

(a) Comme $\int f(x;\theta)dx = 1, \qquad \forall\theta$, on dérive et on intervertit dérivation et intégration :

$$\begin{aligned} 0 &= \int \partial_\theta f(x;\theta)dx = \int f(x;\theta), \partial_\theta \log f(x;\theta)dx \\ &= \mathbb{E}_\theta[\ell'(\theta)]. \end{aligned}$$

(b) On dérive encore une fois : $0 = \int \partial_\theta^2 f(x;\theta)dx$. Or

$$\partial_\theta^2 f = \partial_\theta\big(f\ell'\big) = f\ell'' + f(\ell')^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int \big(f\ell'' + f(\ell')^2\big), d\mu \\ &= \mathbb{E}_\theta[\ell''(\theta)] + \mathbb{E}_\theta[(\ell'(\theta))^2]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_\theta[(\ell'(\theta))^2] = -, \mathbb{E}_\theta[\ell''(\theta)].$$

D'après (a), $\mathbb{E}_\theta[\ell'(\theta)] = 0$, donc

$$\mathrm{var}_\theta(\ell'(\theta)) = \mathbb{E}_\theta[(\ell'(\theta))^2].$$

On obtient donc :

$$\mathbb{E}_\theta[-\ell''(\theta)] = \mathbb{E}_\theta[(\ell'(\theta))^2] = \mathrm{var}_\theta[\ell'(\theta)] \in (0, \infty),$$

sous les hypothèses de régularité habituelles.

SÉRIE 11

Exercice 43

On suppose que des émissions radioactives ont lieu à des intervalles indépendants et que l'intervalle de temps entre deux émissions est bien modélisé par une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ inconnu. On mesure n intervalles de temps successifs; l'intervalle de temps du $i$ième intervalle est donné par la valeur d'une variable aléatoire X_i. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ, l'information observée et l'information de Fisher. L'estimateur est-il consistant?

Solution 43

On observe $x_1, \dots, x_n$, une réalisation de $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$. La fonction de vraisemblance est

$$L(\lambda) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j; \lambda) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\right), \quad \lambda > 0,$$

et ainsi la log-vraisemblance est $\ell(\lambda) = \log L(\lambda) = n(\log \lambda - \lambda \bar{x})$, pour $\lambda > 0$, avec $\bar{x} = n^{-1} \sum x_j$.

- On a
$$\ell'(\lambda) = n(1/\lambda - \bar{x}), \quad \ell''(\lambda) = -n/\lambda^2, \quad \lambda > 0.$$
L'estimateur de maximum de vraisemblance est la solution à l'équation $\ell'(\lambda) = 0$, soit $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$. Puisque $\ell''(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda > 0$, on voit que $\hat{\lambda}$ donne l'unique maximum de ℓ.

- L'information observée est $J(\lambda) = -\ell''(\lambda) = n/\lambda^2$. Celle-ci n'est pas aléatoire, et ainsi égale l'information de Fisher: $I(\lambda) = J(\lambda) = n/\lambda^2$.

- La loi des grands nombres donne $\bar{X} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X) = 1/\lambda > 0$ quand $n \to \infty$, et puisque la fonction $h(x) = 1/x$ est continue pour $x > 0$,
$$\hat{\lambda} = 1/\bar{X} \xrightarrow{P} 1/\mathbb{E}(X) = \lambda$$
. L'estimateur $\hat{\lambda}$ est donc consistant.

Exercice 44

On cherche à estimer μ^2 à l'aide de n mesures $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} (\mu, \sigma^2)$.

(a) Montrer que $\overline{X}^2 = \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$ est un estimateur biaisé de μ^2.

(b) Déterminer a tel que $\overline{X}^2 - aS^2$ soit un estimateur non biaisé de μ^2, où $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$.

Solution 44

(a) Par la linéarité de l'espérance, on voit facilement que $E[\overline{X}] = \mu$. D'autre part, comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes (ce qui implique que $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ quand $i \neq j$), on peut écrire:
$$\text{var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \text{var}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$
On obtient alors:
$$E[\overline{X}^2] = \text{var}(\overline{X}) + \Big(E[\overline{X}]\Big)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$
D'où, le biais de $\overline{X}^2$ est égal à $\sigma^2/n \neq 0$, ce qui montre que cet estimateur est biaisé.

(b) Par l'exercice 1 de la série 13, on sait que $E[S^2] = \sigma^2$. On obtient alors:
$$E[\overline{X}^2 - kS^2] = E[\overline{X}^2] - kE[S^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - k\sigma^2.$$
Par suite, en posant $k = \dfrac{1}{n}$, on obtient $E[\overline{X}^2 - kS^2] = \mu^2$. D'où $\overline{X}^2 - \dfrac{S^2}{n}$ est un estimateur non biaisé de μ^2.

Exercice 45(Suite de l'exercice 39)

On rappelle que $\tilde{\theta} = 2\bar{X}$ et $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$.

e) Donner la loi approchée de $\tilde{\theta}$ et ainsi construire un intervalle de confiance pour θ.

f) Un échantillon de $n = 16$ plaques numérologiques vaudoises à pour maximum 523308 et pour moyenne 320869. Calculer un intervalle de confiance (IC) bilatéral de niveau 95% pour le nombre de voitures θ dans l'état de Vaud. Calculer aussi un IC $(0, U)$ pour θ de niveau 95%, et en donner l'interprétation. Est-ce que vous trouvez ce modèle raisonnable?

Solution 45

e) On a $\mathbb{E}_\theta(\tilde{\theta}) = \theta$ et $\text{Var}_\theta(\tilde{\theta}) = \theta^2/3n$. Pour n grand, le TLC implique que la loi de $Y := (\tilde{\theta} - \mathbb{E}_\theta(T))/\sqrt{\text{Var}_\theta(T)}$ est proche de la loi $N(0, 1)$. Asymptotiquement, on choisit

$$A_\theta := \{|(\tilde{\theta} - \mathbb{E}_\theta(\tilde{\theta}))/\sqrt{\text{Var}_\theta(\tilde{\theta})}| \le z_{1-\alpha/2}\} .$$

Pour $\alpha = 0.05$, A_θ est réalisé si et seulement si

$$\sqrt{3n}\Big|\frac{\tilde{\theta} - \theta}{\theta}\Big| \le 1.96 \iff \Big(1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\Big)\theta \le \tilde{\theta} \le \Big(1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\Big)\theta .$$

On obtient pour l'intervalle (symétrique) de confiance

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= \Big[\Big(1 + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\Big)^{-1}\tilde{\theta}(\mathbf{x}) \, , \, \Big(1 - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\Big)^{-1}\tilde{\theta}(\mathbf{x})\Big] \\ &\approx \Big[\tilde{\theta}(\mathbf{x}) - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\,\tilde{\theta}(\mathbf{x}) \, , \, \tilde{\theta}(\mathbf{x}) + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\,\tilde{\theta}(\mathbf{x})\Big] . \end{aligned}$$

d) D'aprés e), l'intervalle de confiance (IC) bilatéral de niveau 95% pour le nombre de voitures θ dans l'état de Vaud est $\Big[\tilde{\theta}(\mathbf{x}) - \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\,\tilde{\theta}(\mathbf{x}), \tilde{\theta}(\mathbf{x}) + \frac{1.96}{\sqrt{3n}}\,\tilde{\theta}(\mathbf{x})\Big] \approx [460189, 823286]$.

Si on veut construire un intervalle de confiance (IC) de niveau 95% et de la forme $[0, U]$, pour $\alpha = 0.05$, en choisissant $U = \frac{\max_{i \le n} x_i}{\alpha^{1/n}}$, on peut vérifier que
$\mathbb{P}(0 \le \theta \le U) = \mathbb{P}(\theta \le U) = 1 - \mathbb{P}(\max_{i \le n} x_i \le \alpha^{1/n}\theta) = 1 - \big(\frac{\alpha^{1/n}\theta}{\theta}\big) = 1 - \alpha$.
Ainsi, $[0, U] \approx [0, 631061]$. On peut construire un autre IC avec le même niveau de confiance qui a une longueur plus courte que le second. $[L, U] \approx [523308, 631061]$ où $L = \max_{i \le n} x_i$.

Exercice 46

Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_1, \dots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_Y, \sigma^2)$ deux échantillons indépendants, où μ_X, μ_Y, et σ^2 sont inconnus. Trouver un intervalle de confiance bilatéral pour le paramètre $\theta = \mu_X - \mu_Y$ avec un seuil de confiance $1 - \alpha$.

Solution 46

Soient les variances empiriques :

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2.$$

Comme les variances sont supposées égales, l'estimateur de variance regroupée (pooled variance) est défini par
$$S_p^2 \;=\; \frac{(n-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{2n-2}.$$

On considère la statistique
$$T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\theta}{S_p\sqrt{\frac{2}{n}}}.$$

Sous les hypothèses du modèle, on a que T suit une loi de Student de paramètre $2n-2$. Ainsi, pour un seuil de confiance $1-\alpha$, on obtient
$$\mathbb{P}\left(-t_{1-\alpha/2,\,2n-2} \leq \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\theta}{S_p\sqrt{2/n}} \leq t_{1-\alpha/2,\,2n-2}\right) = 1-\alpha.$$

En isolant θ, on obtient l'intervalle de confiance :
$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\alpha/2,\,2n-2}\,S_p\sqrt{\frac{2}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\alpha/2,\,2n-2}\,S_p\sqrt{\frac{2}{n}}\right].$$

SÉRIE 12

Exercice 47

Utiliser la méthode delta pour construire une intervalle de confiance pour $P[X_1 \leq x_0]$ lorsque $X_1,\dots,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(\lambda)$ pour$\lambda > 0$ inconnu et $x_0 > 0$ fixé.

Solution 47

Les lois exponentielles vérifient $\mathbb{E}[X_i] = 1/\lambda$ et $\mathrm{Var}(X_i) = 1/\lambda^2$. Par le TCL,
$$\sqrt{n}\big(\overline{X}-\tfrac{1}{\lambda}\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, \tfrac{1}{\lambda^2}\big).$$

Considérons la fonction $h(x) = 1/x$ de classe C^1 en $x = 1/\lambda$. On a $h'(x) = -1/x^2$, donc $h'(1/\lambda) = -\lambda^2$. Par la méthode delta (appliquée à $\overline{X}$),
$$\sqrt{n}\big(\widehat{\lambda}-\lambda\big) = \sqrt{n}\big(h(\overline{X})-h(1/\lambda)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0,\,[-\lambda^2]^2\cdot\tfrac{1}{\lambda^2}\big) = \mathcal{N}(0,\lambda^2).$$

Soit maintenant $g(\lambda) = P[X_1 \leq x_0] = 1-e^{-\lambda x_0}$. On a $g'(\lambda) = x_0 e^{-\lambda x_0}$. Appliquant de nouveau la méthode delta à la variable $\widehat{\lambda}$ (qui est consistante et asymptotiquement normale),
$$\sqrt{n}\big(g(\widehat{\lambda})-g(\lambda)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0,\,[g'(\lambda)]^2\cdot\lambda^2\big) = \mathcal{N}\big(0,\,[x_0e^{-\lambda x_0}]^2\lambda^2\big).$$

D'où, pour n grand,
$$g(\widehat{\lambda}) \approx g(\lambda) \pm z_{1-\alpha/2}\,\frac{x_0\lambda e^{-\lambda x_0}}{\sqrt{n}}.$$

On obtient l'intervalle
$$\left[\,g(\widehat{\lambda}) \pm z_{1-\alpha/2}\,\frac{x_0\widehat{\lambda}e^{-x_0\widehat{\lambda}}}{\sqrt{n}}\,\right],$$

Exercice 48

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid provenant d'une distribution $N(\mu, 1)$. On va tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 0$ vs l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 0$ en utilisant la statistique de test

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

et la fonction de test

$$\delta(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |T_n(X_1, \ldots, X_n)| \geq Q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $Q > 0$.

a) Trouver la probabilité de commettre une erreur de type I.

b) Trouver la probabilité de commettre une erreur de type II.

c) Comment se comportent ces deux probabilités lorsqu'on augmente la valeur de Q?

Solution 48

a) Sous H_0 la statistique de test $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ suit une loi $N(0, 1/n)$. Ainsi, $\sqrt{n}T_n \sim N(0,1)$ et la probabilité de commettre une erreur de type I est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\delta = 1) &= \mathbb{P}_0(|T_n| \geq Q) = \mathbb{P}_0(T_n \leq -Q) + \mathbb{P}_0(T_n \geq Q) \\ &= \mathbb{P}_0\left(\sqrt{n}T_n \leq -\sqrt{n}Q\right) + \mathbb{P}_0\left(\sqrt{n}T_n \geq \sqrt{n}Q\right) = 2\Phi(-\sqrt{n}Q), \end{aligned}$$

où $\mathbb{P}_0$ est la probabilité sous H_0 et Φ est la fonction de répartition de $N(0,1)$, et on a utilisé $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

b) Sous H_1 la statistique de test T_n suit la loi $N(\mu, 1/n)$, où $\mu \neq 0$. Il s'ensuit que $\sqrt{n}(T_n - \mu) \sim N(0,1)$ et la probabilité de commettre une erreur de type II est

$$\begin{aligned} g(\mu) &= \mathbb{P}_\mu(\delta = 0) = \mathbb{P}_\mu(|T_n| < Q) = \mathbb{P}_\mu(-Q < T_n < Q) \\ &= \mathbb{P}_\mu\left(\sqrt{n}(-Q - \mu) < \sqrt{n}(T_n - \mu) < \sqrt{n}(Q - \mu)\right) \\ &= \Phi(\sqrt{n}(Q - \mu)) - \Phi(\sqrt{n}(-Q - \mu)) \end{aligned}$$

avec $\mu \neq 0$. 3. On remarque que Φ est continue, strictement croissante et tend vers 0 lorsque $z \to -\infty$, vers 1 lorsque $z \to \infty$. On en déduit que, en fonction de Q, la probabilité de commettre une erreur de type I est une fonction strictement décroissante tandis que la probabilité de commettre une erreur de type II est une fonction strictement croissante. Cela veut dire qu'en réduisant l'erreur de type I, on va forcément augmenter l'erreur de type II. Par ailleurs ces probabilités convergent vers 0 et 1 lorsque $Q \to \infty$.

Exercice 49

Dans un contexte biologique on test $N = 1000$ hypothèses nulles dont 950 sont vraies. Si l'hypothèse H_j est vraie alors la statistique de test T_j correspondante suit une loi normale standard, mais si H_j est fausse on a $T_j \sim \mathcal{N}(3, 1)$.

a) Trouver le niveau critique $t_{1-\alpha}$ pour tester les H_j au niveau de significativité $\alpha = 0.05$.

b) Trouver ainsi les probabilités de faux positif et de vrai positif.

c) Sachant que $T_j > t_{1-\alpha}$, donner la probabilité qu'il s'agit d'un faux positif.

d) Trouver les espérances des nombres de faux positifs et de vrais positifs. Discuter.

Solution 49

a) On cherche une valeur critique $t_{1-\alpha}$ telle que $\Pr_0(T_j \geq t_{1-\alpha}) = \alpha$. Sous H_0, on a $1 - \Phi(t_{1-\alpha}) = \alpha$. On obtient alors $t_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha) = 1.644$ pour $\alpha = 0.05$.

b) La probabilité d'un faux positif est $\Pr_0(T_j > t_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(t_{1-\alpha}) = \alpha$. La probabilité d'un vrai positif est $\Pr_1(T_j \geq t_{1-\alpha}) = \Pr_1(T_j - 3 \geq t_{1-\alpha} - 3) = 1 - \Phi(t_{1-\alpha} - 3) = 1 - \Phi(1.644 - 3) = 0.91$.

c) Soit $I_j = I(\text{hypothèse } H_j \text{ est vraie})$. Alors

$$\begin{aligned}
\Pr(I_j = 1 \mid T_j > t_{1-\alpha}) &= \frac{\Pr(T_j > t_{1-\alpha} \mid I_j = 1)\mathbb{P}(I_j = 1)}{\Pr(T_j > t_{1-\alpha} \mid I_j = 1)\mathbb{P}(I_j = 1) + \Pr(T_j > t_{1-\alpha} \mid I_j = 0)\mathbb{P}(I_j = 0)} \\
&= \frac{(1 - \Phi(t_{1-\alpha}))\mathbb{P}(I_j = 1)}{(1 - \Phi(t_{1-\alpha}))\mathbb{P}(I_j = 1) + (1 - \Phi(t_{1-\alpha} - 3))\mathbb{P}(I_j = 0)} \\
&\approx \frac{0.05 \times 950/1000}{0.05 \times 950/1000 + 0.91 \times 50/1000} \\
&= 0.51,
\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(I_j = 1) = 950/1000$ et $\mathbb{P}(I_j = 0) = 50/1000$. On peut conclure qu'à peu près la moitié des hypothèses réjétées sont des faux positifs.

d) Pour $\alpha = 0.05$ l'espérance du nombre de faux positifs est $950 \times 0.05 = 47.5$ et l'espérance du nombre de vrais positifs est $50 \times 0.91 \approx 45$. Ces espérances s'alignent avec b), car $47.5/(47.5 + 45) \approx 0.51$.

Exercice 50

Afin de tester si une pièce est biaisée, on la lance n fois indépendamment, donnant $y_1, \ldots, y_n$, où $y_j = 1$ si on observe 'face' sur le $j$ème lancer et $y_j = 0$ sinon.

a) Décrire un modèle statistique pour cette expérience, et énoncer une hypothèse nulle H_0 à tester.

b) Vous semble-t-il que $S = \sum_{j=1}^n Y_j$ soit une statistique appropriée pour tester H_0? Sinon comment faut-il la modifier? Donner la loi de S sous H_0, et ainsi trouver une p-valeur approchée.

c) J'ai fait tourné une pièce de 5 Fr 200 fois et observé 115 faces. La pièce est-elle equilibrée?

Solution 50

a) Si nous désignons X comme étant le nombre total de faces, alors X suit une distribution binomiale $X \sim B(n, p)$. Si la pièce est équilibrée alors $p = \frac{1}{2}$ et l'hypothèse nulle est $H_0 : p = \frac{1}{2}$.

b) On veut une statistique de test qui aurait tendance à être grande quand H_0 est fausse, c'est-à-dire que $p < 1/2$ ou $p > 1/2$. Donc $S = \sum_{j=1}^n Y_j$ n'est pas un bon choix car il détectera que le cas $p > 1/2$. Un meilleur choix est $T = |S - n/2|$, qui sera grande quand $\mathbb{E}(S) = np$ diverge de sa valeur $n/2$ sous H_0. Sous H_0, $S \sim B(n, 1/2)$, et ainsi $S \dot\sim \mathcal{N}(n/2, n/4)$ sous H_0. Donc

$$\mathbb{P}_0(T \geq t_{\text{obs}}) = \mathbb{P}_0(|S - n/2| \geq t_{\text{obs}}) = \mathbb{P}_0(S - n/2 \leq -t_{\text{obs}} \text{ ou } S - n/2 \geq t_{\text{obs}}),$$

et avec l'approximation normale $S \dot\sim \mathcal{N}(n/2, n/4)$ ceci devient

$$2\mathbb{P}_0(S - n/2 \leq -t_{\text{obs}}) \doteq 2\Phi\left(-\frac{t_{\text{obs}}}{\sqrt{n/4}}\right) = 2\Phi\left(-2n^{-1/2}t_{\text{obs}}\right).$$

c) Dans ce cas $t_{\text{obs}} = |115 - 200/2| = 15$, et donc $p_{\text{obs}} \doteq 2\Phi(-30/\sqrt{200}) = 0.034$. C'est donc un événement peu habituel, mais pas autant que l'on pourrait être assez certain que la pièce n'est pas equilibrée.