MATH 233: Examen de mi-parcours

18 Novembre 2025

Durée: 80 minutes.

Nom :

Sciper :

Numéro :

Question	1		2		3		4		5		Total
	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	
Points											

Instructions

1. Remettez votre copie d'examen ainsi que *tous* vos brouillons avant de quitter la salle d'examen.
2. Les calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, ainsi que les transparents ou vos propres notes ne sont pas autorisés. La seule exception est une seule pag A4 (recto verso) avec des notes manuscrites.
3. Justifiez toujours vos calculs. Si ceux-ci omettent des détails importants ou si votre notation n'est pas cohérente, vous risquez d'être pénalisé.
4. Vos solutions doivent être rédigées en français ou en anglais.
5. Vous pouvez utiliser les théorèmes/propositions/lemmes/corollaires du cours, à condition qu'ils soient clairement énoncés et que leurs conditions soient vérifiées, sauf indication contraire dans la question. Bien sûr, vous ne pouvez pas simplement vous référer à une affirmation du cours si le but est de prouver cette même affirmation (ou une version trivialement équivalente de celle-ci).
6. Répondez à toutes les questions 1 à 4 pour obtenir la note maximale. La question 5 est une question bonus et peut être répondue pour obtenir des points supplémentaires. Toutes les questions valent le même nombre de points.

$\boxed{\text{Good luck!}}$

Exercice 1

a) Soit X une variable aléatoire avec distribution $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que sa fonction génératrice des moments est donnée par $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$.

b) Déduire ou calculer directement la valeur de $E[X^k]$ pour $k = 1, 2$ lorsque X est $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (un calcul est attendu).

Solution 1

a) Traitons tout d'abord le cas d'une v.a. Y de loi $N(0,1)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} e^{-y^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y^2 - 2ty + t^2\right)/2} e^{t^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-t)^2/2} dy = e^{t^2/2} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $X = \mu + \sigma Y$, avec Y de loi $N(0,1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{\mu t + \sigma t Y}\right] \\ &= e^{\mu t} E\left[e^{\sigma t Y}\right] = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2} = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

b) We have

$$M_X'(t) = (\mu + \sigma^2 t) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

and

$$M_X''(t) = \sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + (\mu + \sigma^2 t)^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Hence $E[X] = M_X'(0) = \mu$ and $E[X^2] = M_X''(0) = \sigma^2 + \mu^2$.

Remark: a direct computation is also OK.

Exercice 2

a) (Loi log-normale) Soit X une v.a. normale standard. Trouver la fonction de densité de la v.a. $Y = e^X$.

b) Soient $B, C \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, trouver la probabilité que $x^2 + Bx + C = 0$ ait deux racines réelles.

Solution 2

a) Observons que $Y = g(X)$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = e^x$. La fonction g est bijective, g et g^{-1} sont de classe C^1 et $\mathbb{P}\{X \in \mathbb{R}\} = 1$. Nous pouvons donc appliquer le lemme du cours :

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}$$

Comme X est une v.a. normale standard, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Ainsi, pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\log y)^2/2}}{\left|e^{\log(y)}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-(\log y)^2/2},$$

et $f_Y(y) = 0$ si $y \leqslant 0$.

b) (B, C) sont indépendants et ont chacun la distribution $U(0, 1)$, de sorte que leur densité conjointe est la suivante

$$f_{B,C}(b, c) = \begin{cases} 1, & 0 < b, c < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Il y aura deux racines réelles si $B^2 > 4C$ ou équivalent à $1 > B > 2\sqrt{C} > 0$,

$$\mathbb{P}(B > 2\sqrt{C}) = \int\int_{\{(b,c):b>2\sqrt{c}\}} f_{B,C}(b, c)\, \mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int_0^{1/4} \mathrm{d}c \int_{2\sqrt{c}}^1 \mathrm{d}b\, 1 = \int_0^{1/4} \mathrm{d}c\, (1 - 2\sqrt{c}) = 1/12.$$

Exercice 3

Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire continu ayant pour fonction de densité

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x_1 + x_1 x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in [0, 1]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer $\mathbb{P}\left(X_2 > X_1 + \frac{1}{2}\right)$.

b) Quelle est la fonction de densité marginale de X_2 ?

Solution 3

a) Observons que

$$\begin{aligned} P\left\{X_2 > X_1 + \frac{1}{2}\right\} &= \int_{\{(x_1,x_2):x_2>x_1+(1/2)\}} f\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{1/2} \int_{x_1+(1/2)}^1 x_1\left(1 + x_2\right) dx_2 dx_1 \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{1/2} x_1 \left[x_2 + \frac{x_2^2}{2}\right]_{x_2=x_1+(1/2)}^{x_2=1} dx_1 \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{1/2} \left(\frac{7}{8} x_1 - \frac{3}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^3\right) dx_1 \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{7}{16} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^3 - \frac{1}{8} x_1^4\right]_0^{1/2} = \frac{4}{3} \frac{5}{128} = \frac{5}{96} \end{aligned}$$

b) Pour $x_2 \notin [0,1]$, $f_{X_2}(x_2) = 0$. Pour $x_2 \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 = \frac{4}{3} \int_0^1 x_1 (1 + x_2)\, dx_1 \\ &= \frac{4}{3}(1 + x_2) \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(1 + x_2) \end{aligned}$$

Exercice 4

Lors de l'épidémie de COVID-19 en 2022 aux États-Unis, 28.1% des personnes hospitalisées étaient non-vaccinées, et 71.9% des personnes hospitalisées étaient vaccinées.

a) On sait que 80% de la population totale des États-Unis était vaccinée et que le taux d'hospitalisation était de 1%, quelle est la probabilité d'être hospitalisé sachant qu'on est vacciné ?

b) On s'intéresse au groupe des moins de 60 ans, qu'on appelle "jeune". On sait que

- 70% des jeunes sont vaccinés,
- la probabilité d'être hospitalisé sachant qu'on est jeune est de 0.25%,
- parmi les jeunes hospitalisés, 50% sont vaccinés et 50% ne le sont pas.

Quelle est la probabilité d'être hospitalisé sachant qu'on est vacciné et jeune ?

Solution 4

a)

On a $P(V|H) = 0.719$. De plus $P(V) = 0.8$ et $P(H) = 0.01$. Par Bayes,

$$P(H|V) = \frac{P(V|H)P(H)}{P(V)} \simeq 0.00899.$$

b)

$$P(H|V, <60) = \frac{P(V|H, <60)P(H| <60)}{P(V| <60)} = \frac{0.50 \times 0.0025}{0.70} \simeq 0.00179.$$

Exercice 5(BONUS)

a) Montrer que l'intersection de deux σ-algèbres est une σ-algèbre.

b) Donner un contre-exemple pour montrer que l'union de deux σ-algèbres n'est pas toujours une σ-algèbre.

Solution 5

a)

Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ une famille de σ-algèbres sur X et posons

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i.$$

Comme chaque $\mathcal{F}_i$ contient X, on a $X \in \mathcal{F}$. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A \in \mathcal{F}_i$ pour tout i, donc $A^c \in \mathcal{F}_i$ pour tout i, d'où $A^c \in \mathcal{F}$. Si $(A_n) \subset \mathcal{F}$, alors $A_n \in \mathcal{F}_i$ pour tout i et tout n, donc $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_i$ pour tout i, d'où $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre.

b) Sur $X = \{1, 2, 3\}$, posons

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, X\}, \qquad \mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{2\}, \{1, 3\}, X\}.$$

Alors $\mathcal{U} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ contient $\{1\}$ et $\{2\}$, mais

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{U}.$$

Donc $\mathcal{U}$ n'est pas stable par réunion : ce n'est pas une σ-algèbre.