

# MATH233 Exercices

2025

## SÉRIE 1

### Exercice 1

Soit  $\Omega$  un ensemble et soient  $\mathbb{E}$ ,  $F$  et  $G$  trois événements de  $\Omega$ . Quel événement correspond à chacune des descriptions suivantes ?

- a)  $\mathbb{E}$  et  $F$  se réalisent, mais  $G$  ne se réalise pas ;
- b) au moins l'un de ces événements se réalise ;
- c) au plus deux des trois événements se réalisent ;
- d) exactement un de ces événements se réalise.

### Exercice 2

Soit  $\Omega$  un ensemble et soient  $\mathbb{E}$ ,  $F$  et  $G$  trois événements de  $\Omega$ . Quel événement correspond à chacune des descriptions suivantes ?

- a)  $\mathbb{E}$  est le seul des trois événements mentionnés qui se réalise ;
- b) au moins deux de ces événements se réalisent ;
- c) au plus l'un des trois événements se réalisent ;
- d) exactement deux de ces événements se réalisent.

### Exercice 3

On considère l'expérience (de pensée) qui consiste à lancer une pièce une infinité de fois. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$ , l'événement: "le  $k$ -ième lancer est pile". Ecrire, à l'aide de  $A_k$ , l'événement  $A_\infty$ : "à partir d'un certain lancer, on n'obtient plus que des piles".

### Exercice 4

Soit  $\Omega$  un ensemble. Etant donné une suite  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements de  $\Omega$ , on considère l'événement "il y a une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles  $G_n$  se réalise" et on note cet événement  $\limsup_{n \rightarrow \infty} G_n$ . Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} G_m.$$

### Exercice 5

Soit  $(E_n, n \geq 1) \subset \mathcal{F}$ . Trouver une suite  $(F_n, n \geq 1) \subset \mathcal{F}$  d'événements deux à deux disjoints telle que pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\bigcup_{n=1}^m E_n = \bigcup_{n=1}^m F_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

## SÉRIES 2 ET 3

### Exercice 6

Une expérience consiste à jeter un dé équilibré de manière répétée avec pour résultat le nombre de jets avant l'apparition d'un premier trois.

- Définir l'espace fondamental  $\Omega$  qui correspond à ce résultat.
- Pour  $k \geq 0$ , soit  $A_k$  l'événement: "il faut  $k$  jets avant que (au jet  $k + 1$ ) le premier TROIS apparaisse". Calculer  $\mathbb{P}(A_k)$ , la probabilité de l'événement  $A_k$ , et  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(A_k)$ .
- Soient  $\mathbb{E}_p$  et  $\mathbb{E}_i$ , les événements: "le nombre de jets avant le premier TROIS est pair, resp. impair".
  - Exprimer  $\mathbb{E}_p$  à l'aide des  $A_k$  et calculer  $\mathbb{P}(E_p)$ .
  - Calculer  $\mathbb{P}(E_i)$ .

### Exercice 7

On dispose d'un dé équitabile.

- Donner l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  si on lance le dé trois fois de suite.
- Quelle est la probabilité que la somme des résultats vaille 3, vaille 4 et vaille 5 ?

### Exercice 8

(a) En calculant de deux façons différentes le nombre de manières de constituer une classe d'étudiants avec un délégué de classe à partir d'un groupe de  $n$  étudiants, établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(b) Utilisant que des mots (sans algèbre), expliquer pourquoi

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}, \quad \sum_{j=0}^r \binom{m}{j} \binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}.$$

### Exercice 9

Un examen consiste à répondre à un ensemble de questions à choix multiples, chacune ayant cinq choix de réponses proposées (seule une réponse est correcte). Supposons que vous devez passer l'examen et que, pour chaque question, vous estimez à  $3/4$  votre probabilité de connaître la réponse. Si vous ignorez la réponse, vous décidez que vous cochez une réponse au hasard. Quelle est la probabilité que vous répondrez correctement à une question donnée?

### Exercice 10

Une urne contient  $r$  boules rouges et  $b$  boules bleues,  $r \geq 1$ ,  $b \geq 3$ . Trois boules sont tirées au hasard sans remplacement. En utilisant la notion de probabilité conditionnelle pour simplifier le problème, trouver la probabilité de tirer dans l'ordre une boule bleue, une boule rouge et enfin, une boule bleue.

### Exercice 11

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} c(4 - x^2) & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Quelle est la valeur de  $c$  ?
- Représenter graphiquement puis calculer explicitement la fonction de répartition de  $X$ .

Mêmes questions pour la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cos^2(x) & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Exercice 12

Soient  $F$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  et  $D$  l'ensemble des discontinuités de  $F$ . Supposons que  $\mathbb{P}\{X \in D\} > 0$  et posons  $F_d(x) = \mathbb{P}\{X \leq x | X \in D\}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $F_d$  est une fonction de répartition.

## SÉRIE 4

### Exercice 13

On jette deux dés équilibrés indépendants. Soit  $X$  le produit des deux résultats. Trouver sa loi.

### Exercice 14

Pour les lois suivantes, vérifier que somme des probabilités vaut 1: (a) la loi géométrique de paramètre  $\mathbb{P}$ ; (b) la loi de Poisson avec paramètre  $\lambda$ ; (c) la loi binomiale négative de paramètres  $(r, p)$ .

Indications:

- Noter que:  $(1 - x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} x^j$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $|x| < 1$ .
- Loi binomiale négative  $(r, p)$ :  $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$ ,  $n = r, r+1, \dots, r \in \mathcal{N}^*, 0 < p \leq 1$ .

### Exercice 15

Soit  $X$  une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Pour  $x > 0$  et  $y > 0$ , montrer que  $\mathbb{P}(X > x + y | X > y) = \mathbb{P}(X > x)$  (propriété d'absence de mémoire).

### Exercice 16

- (Loi log-normale) Soit  $X$  une v.a. normale standard. Trouver la fonction de densité de la v.a.  $Y = e^X$
- Soient  $X$  une v.a. normale standard et  $Z$  une v.a. qui est solution de l'équation  $Z^3 + Z + 1 = X$ . Trouver la fonction de densité de  $Z$ .

### Exercice 17

Cet exercice présente la démarche permettant de simuler des nombres aléatoires selon une loi donnée.

- Comment générer une variable aléatoire uniforme à partir d'une suite de variable Bernoulli? Indication: penser à une combinaison linéaire de variables Bernoulli et au développement en base 2.
- Comment générer une variable aléatoire de loi arbitraire à partir d'une variable aléatoire uniforme?

## SÉRIE 5

### Exercice 18

Soit  $X$  une v.a. telle que  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Trouver  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{E}[(X - a)^2]$  soit minimal.

### Exercice 19

Montrer que :

- $\mathbb{E}[|X|] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq k)$ .  $X$  est discrète à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ ,
- $\mathbb{E}[|X|] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}[|X| > x] dx$  lorsque  $X$  est continue.

### Exercice 20

Soit  $X$  une variable géométrique de probabilité  $p > 0$  correspondant au nombre de lancers d'une pièce avant d'obtenir un premier succès. Démontrer que  $\mathbb{E}(X) = (p - 1)/p$ :

- en conditionnant sur le résultat du premier lancer pour obtenir  $\mathbb{E}(X) = (1 - p)(1 + \mathbb{E}(X))$ ;
- à l'aide des dérivées de l'équation  $\sum_{x=0}^{\infty} u^x = 1/(1 - u)$ , ( $|u| < 1$ ).

*Indication : la formule des probabilités totales donne  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X | A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X | A^c) \times \mathbb{P}(A^c)$ .*

### Exercice 21

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Rappelons que l'entropie de  $X$  est donnée par  $h(X) = -\sum_{j=1}^n p_j \ln p_j$ . Remarquons que  $0 \ln 0 = 0$ .

- Calculer  $h(X)$  si  $X$  est constante.
- Calculer  $h(X)$  si  $X$  est équi-distribuée.
- Trouver l'entropie maximale si le support  $S_X$  contient  $n$  valeurs.

## SÉRIE 6

### Exercice 22

Soient  $X, Y, Z$  des variables aléatoires telles que  $\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[Z^2] < \infty$ . Montrer que

- $\text{cov}(aX + bY, cZ) = ac \text{cov}(X, Z) + bc \text{cov}(Y, Z)$ .
- Les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ ,
  - $\text{cov}(X, Y) = 0$ ,
  - $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ .

### Exercice 23

On tire successivement avec remise deux boules d'une urne contenant trois boules numérotées respectivement 2, 3 et 4. Soient  $X_1$  la somme des numéros et  $X_2$  le produit des numéros.

- Quelle est la fonction de densité conjointe de  $(X_1, X_2)$  ?
- Quelles sont les fonctions de densité marginales de  $X_1$  et  $X_2$  ?

### Exercice 24

Soit  $(X_1, X_2)$  un vecteur aléatoire continu ayant pour fonction de densité

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c(x_1 + x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Que vaut  $c$  ?
- Calculer  $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$ .
- Quelle est la fonction de densité marginale de  $X_1$  ?
- Que vaut  $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$  ?

### Exercice 25

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. continues i.i.d. avec fonction de densité  $f$ . Montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \dots < X_n) = \frac{1}{n!}.$$

### Exercice 26

Trouver les fonctions de densité de

- $W = \max(U_1, \dots, U_n)$  quand  $U_1, \dots, U_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$ ;
- $V = \min(X_1, \dots, X_n)$  quand  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$ .

## SÉRIE 7

### Exercice 27

La *corrélation* de deux variables aléatoires  $X$  and  $Y$  de variances positives est défini comme

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\{\text{var}(X) \text{var}(Y)\}^{1/2}}.$$

Soient  $a, b, c, d$  des constantes réelles.

- Calculer  $\text{var}(a + bX + cY)$  et démontrer que  $|\text{corr}(X, Y)| \leq 1$ , avec égalité si et seulement si il existe une relation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .
- Démontrer que  $\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd \text{cov}(X, Y)$ , et ainsi déduire que
$$\text{corr}(a + bX, c + dY) = \text{sign}(bd) \text{corr}(X, Y).$$
- Les températures journalières moyennes ( $^{\circ}\text{F}$ ) à New York et Chicago ont pour corrélation 0.6. Donner la corrélation entre les moyennes correspondantes en Celsius. Que pouvez-vous dire des covariances?

### Exercice 28

- (a) Soient  $A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , trouver la fonction de densité de la racine de  $A + Bx = 0$ .
- (b) Soient  $B, C \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$ , trouver la probabilité que  $x^2 + Bx + C = 0$  ait deux racines réelles.

### Exercice 29

Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire discret dans  $\mathbb{R}^2$  dont la fonction de densité conjointe est

$$\mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \binom{n}{x} \binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y},$$

pour  $x, y \in \{0, \dots, n\}$  avec  $x + y \leq n$  (loi multinomiale).

- (a) Déterminer la fonction de densité marginale de  $X$ .
- (b) Montrer que les fonctions de densité conditionnelles  $\mathbb{P}\{Y = y \mid X = x\}$  et  $\mathbb{P}\{X = x \mid Y = y\}$  sont des densités binomiales dont on déterminera les paramètres.
- (c) Calculer  $\mathbb{E}[Y \mid X = x]$  et  $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ .
- (d) Trouver  $\mathbb{E}[Y \mid X]$  et  $\mathbb{E}[X \mid Y]$ .
- (e) Calculer  $\mathbb{P}\{\mathbb{E}[X \mid Y] = 0\}$ .

### Exercice 30

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a. indépendantes, où  $X_1$  et  $X_2$  sont des v.a. de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Posons  $Z = X_1 + X_2$ .

- (a) Trouver  $\mathbb{P}\{X_2 = x_2, Z = z\}$  et  $\mathbb{P}\{X_2 = x_2 \mid Z = z\}$ .
- (b) En déduire  $\mathbb{E}[X_2 \mid Z = z]$  et  $\mathbb{E}[X_2 \mid Z]$ .
- (c) Calculer  $\mathbb{P}\left\{E[X_2 \mid Z] \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right\}$ .

## SÉRIE 8

### Exercice 31

Si  $Y \sim N(\mu_{p \times 1}, \Sigma_{p \times p})$ , montrer que :

- (a)  $M_Y(u) = \exp\{u^\top \mu + \frac{1}{2} u^\top \Sigma u\}$
- (b)  $AY \perp BY \iff A \Sigma B^\top = 0$ .

### Exercice 32

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi du  $\chi^2$  à  $k$  degrés de liberté, notée  $X \sim \chi_k^2$ .

- (a) Prouver que la fonction génératrice des moments (mgf) de  $X$  est

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = (1 - 2t)^{-k/2}, \quad \text{pour } t < \frac{1}{2}.$$

- (b) En déduire l'espérance  $\mathbb{E}[X]$  et la variance  $\text{Var}(X)$ .

### Exercice 33

Pour  $\lambda > 0$  fixé, soit pour tout  $n \geq 1$  la variable aléatoire  $X_n$  de loi géométrique (nombre d'échecs avant le premier succès) de paramètre  $p_n = \frac{\lambda}{n}$ . On pose  $Y_n = X_n/n$ . Montrer que  $Y_n \xrightarrow{d} \text{Exp}(\lambda)$ .

### Exercice 34

Let  $X_1, X_2, X_3, \dots$  be a sequence of i.i.d. Uniform(0, 1) random variables. Define the sequence  $Y_n$  as

$$Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Prove the following convergence results independently (i.e, do not conclude the weaker convergence modes from the stronger ones).

- (a)  $Y_n \xrightarrow{d} 0$
- (b)  $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- (c)  $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$ .

## SÉRIE 9

### Exercice 35

Soient  $\{X_j\}$  des variables aléatoires indépendantes d'espérance  $\mu$  et de variance finie  $\sigma^2$ , soit  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$ , et soit  $g$  une fonction dérivable telle que  $g'(\mu) \neq 0$ .

- (a) Donner la loi approchée de  $Z_n = (\bar{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$ , et ainsi montrer que

$$g(\bar{X}) = g(\mu + \sigma Z_n/n^{1/2}) \sim \mathcal{N}\{g(\mu), \sigma^2 g'(\mu)^2/n\}$$

pour  $n$  grand.

- (b) Trouver la loi approchée de  $2\bar{X}^{1/2}$  quand les  $X_j$  suivent une loi de Poisson.
- (c) Trouver la loi approchée de  $1/\bar{X}$  quand  $X_j$  suivent une loi gaussienne. Attention au cas  $\mu = 0$ !

### Exercice 36

Sous les hypothèses du théorème central limite, posons  $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu)$ . Supposons qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\mathbb{E}[e^{tX_1}] < \infty$  pour tout  $t \in ]-t_0, t_0[$ .

Montrer que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$  où  $Z \sim N(0, 1)$ .

### Exercice 37

- (a) Soit  $X$  une v.a. binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 1/2$ . A l'aide de l'égalité  $\mathbb{P}\{X = 50\} = \mathbb{P}\{49,5 < X < 50,5\}$  et du théorème central limite, estimer  $\mathbb{P}\{X = 50\}$ .
- (b) Un dé est jeté 200 fois de suite. Estimer la probabilité que la somme des nombres obtenus se situe dans l'intervalle  $[650, 750]$ .

### Exercice 38

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a. i.i.d de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Trouver le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{P}\{S_n/n < 0.51\} \geq 0.84$ .

## SÉRIE 10

### Exercice 39

Soient  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ , où  $\theta$  est un paramètre inconnu à estimer.

- Trouver la fonction de vraisemblance  $L(\theta)$ .
- Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$ .  
*Indication: esquisser le graphe de  $\theta \mapsto L(\theta)$  pour un échantillon donné.*
- Montrer que le biais de  $\hat{\theta}$  est  $b(\theta) = -\theta/(n+1)$ . Comment modifier  $\hat{\theta}$  afin d'avoir un estimateur non biaisé?  
*Indication: le biais est défini par  $b(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$ .*
- Soit  $\tilde{\theta} = 2\bar{X}$  où  $\bar{X}$  est la moyenne des  $X_i$ . Montrer que  $\tilde{\theta}$  est un estimateur non-biaisé de  $\theta$ . Calculer les variances de  $\hat{\theta}$  et  $\tilde{\theta}$ .

### Exercice 40

Dans la population des ménages d'un pays lointain le montant des économies mensuelles  $X$  (exprimées en milliers de maravédís) possède la distribution de densité

$$f(x; \lambda) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0,$$

où  $\lambda$  est inconnu. Un échantillon aléatoire de 400 ménages a moyenne  $\bar{x} = 2$  milliers de maravédís.

- Estimer  $\lambda$  en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.
- Calculer l'information observée.
- Négligeant l'erreur d'estimation de  $\lambda$ , quel est le pourcentage des familles qui économisent moins de 1000 maravédís par mois?

### Exercice 41

On suppose que des émissions radioactives ont lieu à des intervalles indépendants et que l'intervalle de temps entre deux émissions est bien modélisé par une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\lambda$  inconnu. On mesure  $n$  intervalles de temps successifs; l'intervalle de temps du  $i$ ème intervalle est donné par la valeur d'une variable aléatoire  $X_i$ . Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\lambda$ , l'information observée et l'information de Fisher. L'estimateur est-il consistant?

### Exercice 42

On suppose que le modèle est identifiable et la vraisemblance est suffisamment régulière pour permettre sa double dérivation sous le signe intégral. Montrer que :

- $\mathbb{E}_\theta[l'(\theta)] = 0$ ,
- $\mathbb{E}_\theta[-l''(\theta)] = \mathbb{E}_\theta[\{l'(\theta)\}^2] = \text{var}[l'(\theta)] \in (0, \infty)$ .

## SÉRIE 11

### Exercice 43

On suppose que des émissions radioactives ont lieu à des intervalles indépendants et que l'intervalle de temps entre deux émissions est bien modélisé par une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\lambda$  inconnu. On mesure  $n$  intervalles de temps successifs; l'intervalle de temps du  $i$ ème intervalle est donné par la valeur d'une variable aléatoire  $X_i$ . Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\lambda$ , l'information observée et l'information de Fisher. L'estimateur est-il consistant?

### Exercice 44

On cherche à estimer  $\mu^2$  à l'aide de  $n$  mesures  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} (\mu, \sigma^2)$ .

(a) Montrer que  $\overline{X^2} = (n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i)^2$  est un estimateur biaisé de  $\mu^2$ .

(b) Déterminer  $a$  tel que  $\overline{X^2} - aS^2$  soit un estimateur non biaisé de  $\mu^2$ , où  $S^2 = (n-1)^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$ .

### Exercice 45(Suite de l'exercice 39)

On rappelle que  $\tilde{\theta} = 2\overline{X}$  et  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ .

e) Donner la loi approchée de  $\tilde{\theta}$  et ainsi construire un intervalle de confiance pour  $\theta$ .

f) Un échantillon de  $n = 16$  plaques numérogiques vaudoises à pour maximum 523308 et pour moyenne 320869. Calculer un intervalle de confiance (IC) bilatéral de niveau 95% pour le nombre de voitures  $\theta$  dans l'état de Vaud. Calculer aussi un IC  $(0, U)$  pour  $\theta$  de niveau 95%, et en donner l'interprétation. Est-ce que vous trouvez ce modèle raisonnable?

### Exercice 46

Soient  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_X, \sigma^2)$  et  $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_Y, \sigma^2)$  deux échantillons indépendants, où  $\mu_X, \mu_Y$ , et  $\sigma^2$  sont inconnus. Trouver un intervalle de confiance bilatéral pour le paramètre  $\theta = \mu_X - \mu_Y$  avec un seuil de confiance  $1 - \alpha$ .

## SÉRIE 12

### Exercice 47

Utiliser la méthode delta pour construire un intervalle de confiance pour  $P[X_1 \leq x_0]$  lorsque  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} Exp(\lambda)$  pour  $\lambda > 0$  inconnu et  $x_0 > 0$  fixé.

### Exercice 48

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon iid provenant d'une distribution  $N(\mu, 1)$ . On va tester l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu = 0$  vs l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu \neq 0$  en utilisant la statistique de test

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

et la fonction de test

$$\delta(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |T_n(X_1, \dots, X_n)| \geq Q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $Q > 0$ .

- a) Trouver la probabilité de commettre une erreur de type I.
- b) Trouver la probabilité de commettre une erreur de type II.
- c) Comment se comportent ces deux probabilités lorsqu'on augmente la valeur de  $Q$ ?

### Exercice 49

Dans un contexte biologique on test  $N = 1000$  hypothèses nulles dont 950 sont vraies. Si l'hypothèse  $H_j$  est vraie alors la statistique de test  $T_j$  correspondante suit une loi normale standard, mais si  $H_j$  est fausse on a  $T_j \sim \mathcal{N}(3, 1)$ .

- a) Trouver le niveau critique  $t_{1-\alpha}$  pour tester les  $H_j$  au niveau de significativité  $\alpha = 0.05$ .
- b) Trouver ainsi les probabilités de faux positif et de vrai positif.
- c) Sachant que  $T_j > t_{1-\alpha}$ , donner la probabilité qu'il s'agit d'un faux positif.
- d) Trouver les espérances des nombres de faux positifs et de vrais positifs. Discuter.

### Exercice 50

Afin de tester si une pièce est biaisée, on la lance  $n$  fois indépendamment, donnant  $y_1, \dots, y_n$ , où  $y_j = 1$  si on observe 'face' sur le  $j$ ème lancer et  $y_j = 0$  sinon.

- a) Décrire un modèle statistique pour cette expérience, et énoncer une hypothèse nulle  $H_0$  à tester.
- b) Vous semble-t-il que  $S = \sum_{j=1}^n Y_j$  soit une statistique appropriée pour tester  $H_0$ ? Sinon comment faut-il la modifier? Donner la loi de  $S$  sous  $H_0$ , et ainsi trouver une  $p$ -valeur approchée.
- c) J'ai fait tourné une pièce de 5 Fr 200 fois et observé 115 faces. La pièce est-elle équilibrée?