Corrigé 1. (a) (2 points) On peut écrire

$$\Omega = \{(r, b, v) : r, b, v \in \{1, \dots, 6\}\}$$

et par symétrie tous les éléments de Ω ont probabilité $1/6^3 = 1/216$.

(b) (2 points) Soit A l'événement 'aucun 3'. Alors $A = \{(r, b, v) : r, b, v \in \{1, \dots, 5\}\}$, et $|A| = 5^3 = 125$. La probabilité recherchée est donc

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - |A|/|\Omega| = 1 - 125/216 = 91/216.$$

(c) (3 points) On énumère les cas pour $\sum X_i = 9$ à droite et pour $\sum X_i = 10$ à gauche :

X_1	X_2	X_3	poids
1	2	6	3!
1	3	5	3!
1	4	4	3
2	2	5	3
2	3	4	3!
3	3	3	1

X_1	X_2	X_3	poids
1	3	6	3!
1	4	5	3!
2	2	6	3
2	4	4	3
2	5	3	3!
3	3	4	3

où les poids représentent le nombre d'éléments correspondant dans l'ensemble fondamental. Comme $|\Omega| = 6^3 = 216$, on trouve

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right) = \frac{25}{216} < \frac{27}{216} = \Pr\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 10\right).$$

(d) (3 points) Dans les tableaux ci-dessus, on ne retient que les lignes où un 3 apparaît, si bien que

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 9 \mid \bigcup_{i=1}^{3}\{X_i = 3\}\right) = \frac{13}{91} < \frac{15}{91} = \Pr\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = 10 \mid \bigcup_{i=1}^{3}\{X_i = 3\}\right).$$

Corrigé 2. On compte 9 e parmi les 36 lettres de *école polytechnique fédérale de Lausanne.*

(a) (2 points) Il y a une seule solution correcte parmi les C_3^9 possibilités de placer les accents sur les e, d'où la probabilité demandée $1/C_3^9 = \frac{1}{84} \approx 0.012$.

(b) (2 points) Pour chaque lettre e, notre Anglais a une chance sur trois d'accentuer correctement cette lettre. La probabilité qu'il écrive correctement le nom de l'école est donc $\frac{1}{3^9} \approx 5 \times 10^{-5}$.

(c) (2 points) Avec la stratégie utilisée en (a), la probabilité devient $\frac{1}{6}$; utilisant la méthode en (b), on obtient $\frac{1}{3^6} \approx 0.0014$.

Corrigé 3. (a) (2 points) On trouve l'expression exacte de la densité en imposant

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_0^1 cx^{\theta-1}dx = 1,$$

d'où $c = \theta$. La fonction de distribution en découle directement :

$$\Pr(X \le x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^\theta, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

(b) (2 points) On calcule $\mathrm{E}(X) = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx = \frac{\theta}{\theta+1}$.
Ainsi une petite valeur de θ implique une attente courte, en moyenne, et θ grand implique une longue attente, en moyenne.

(c) (2 points) On a $F_{X|X<1/2}(x) = F_X(x)/F_X\left(\frac{1}{2}\right)$, $x \le 1/2$. D'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2^\theta x^\theta, & 0 \le x \le 1/2 \\ 1, & x \ge 1/2. \end{cases}$$

(d) (2 points) On peut écrire la suite d'égalités

$$\Pr\left(X > \tfrac{1}{4} \mid X < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Pr\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)}{\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right) - \Pr\left(X < \frac{1}{4}\right)}{\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right)}$$

ou s'inspirer du point précédent pour trouver la probabilité $1 - \frac{1}{2^\theta} \overset{\theta=2}{=} \frac{3}{4}$.

Corrigé 4. (a) (5 points) Les fonctions marginales sont

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \sum_{b=0}^{\infty} f_{S,B}(s,b) \\ &= \sum_{b=0}^{\infty} \theta(1-\theta)^s \lambda(1-\lambda)^b \\ &= \theta(1-\theta)^s \lambda \sum_{b=0}^{\infty} (1-\lambda)^b = \theta(1-\theta)^s \lambda / \{1-(1-\lambda)\} \\ &= \theta(1-\theta)^s, \quad s = 0, 1, \ldots, \end{aligned}$$

en utilisant le rappel, et (même calcul) $f_B(b) = \lambda(1-\lambda)^b$ pour $b = 0, 1, \ldots$.
Ainsi $f_{S,B}(s,b) = f_S(s) \times f_B(b)$, pour tout s, b : S et B sont indépendants.
Pour la probabilité, on cherche

$$\Pr(S > n) = \sum_{s=n+1}^{\infty} \theta(1-\theta)^s = \theta(1-\theta)^{n+1} \sum_{s=0}^{\infty} (1-\theta)^s = \frac{\theta(1-\theta)^{n+1}}{1-(1-\theta)} = (1-\theta)^{n+1}$$

en utilisant l'indication.

(b) (2 points) On cherche ici $\Pr(S = B)$, ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S = n,\ B = n) \overset{\text{indép}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S = n) \Pr(B = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta\lambda \left\{(1-\theta)(1-\lambda)\right\}^{n},$$

que le rappel nous permet de reformuler $\theta\lambda/(\lambda + \theta - \theta\lambda)$.

(c) (2 points) Utilisant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\Pr(S > B) = \sum_{b=0}^{\infty} \Pr(\{S > B\} \cap \{B = b\}) = \sum_{b=0}^{\infty} \Pr(S > b \mid B = b) \Pr(B = b),$$

d'où

$$\begin{aligned} \Pr(S > B) &= \sum_{b=0}^{\infty} (1-\theta)^{b+1} \lambda (1-\lambda)^{b} = \lambda(1-\theta) \frac{1}{1-(1-\theta)(1-\lambda)}, \\ &= \frac{\lambda(1-\theta)}{\theta + \lambda - \theta\lambda}. \end{aligned}$$

(d) (1 point) Utilisant le point (c), on trouve $\Pr(S > B) = 1/5$.