

**Corrigé 1.** (7 points)

(a) (2 points) L'ensemble fondamental  $\Omega$  est

$$\Omega = \{(x, y), x = p, f, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(b) (2 points) Les probabilités des événements élémentaire de  $\Omega$  sont :

$x/y$	1	2	3	4	5	6	
$p$	$1/\cancel{6}12$	$1/\cancel{6}12$	$1/\cancel{6}12$	$1/\cancel{6}12$	$1/\cancel{6}12$	$1/\cancel{6}12$	total = 1.
$f$	$1/48$	$1/48$	$1/816$	$1/816$	$1/816$	$1/816$	

(c) (2 points) Soit  $X$  le résultat du lancer de la pièce,  $Y$  le résultat du lancer du dé. On cherche la probabilité

$$\begin{aligned}\Pr(Y = 1) &= \Pr(Y = 1 | X = p) \Pr(X = p) + \Pr(Y = 1 | X = f) \Pr(X = f) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{24} \approx 0.21.\end{aligned}$$

$$\left[ \text{On} = P(Y=1, X=p) + P(Y=1, X=f) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right]$$

(d) (1 point) On cherche la probabilité

$$\Pr(X = f | Y = 1) = \frac{\Pr(Y = 1 | X = f) \Pr(X = f)}{\Pr(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{24}} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

**Corrigé 2.** (6 points)

- (a) (3 points) Soit  $M$  l'événement 'la personne est porteuse de la maladie' et  $T^+$  l'événement 'le test est positif'. D'après l'énoncé

$$\Pr(M) = 1/1000 = 10^{-4}.$$

Les probabilités de  $T^+$  sachant  $M$  et  $\bar{M}$  sont calculés d'après la loi de Pareto,

$$\Pr(T^+ | M) = \Pr(X > 1 | M) = (1 + 1/99)^{-1} = 0.99,$$

$$\Pr(T^+ | \bar{M}) = \Pr(X > 1 | \bar{M}) = (1 + 49)^{-1} = 0.02.$$

- (b) (2 points) On cherche

$$\begin{aligned} \Pr(M | T^+) &= \frac{\Pr(T^+ | M) \Pr(M)}{\Pr(T^+ | M) \Pr(M) + \Pr(T^+ | \bar{M}) \Pr(\bar{M})} \\ &= \frac{0.99 \cdot 10^{-4}}{0.99 \cdot 10^{-4} + 0.02 \cdot (1 - 10^{-4})} \approx 0.047. \end{aligned}$$

- (c) (1 point) D'après (b), la personne est réellement atteinte de la maladie pour uniquement 5% des cas quand le test est positif. Cette probabilité semble trop faible. Afin d'améliorer le test il faut diminuer la probabilité de fausse détection, c'est à dire la probabilité que le test soit positif pour une personne saine, car  $\Pr(M | T^+) \rightarrow 1$  quand  $\Pr(T^+ | \bar{M}) \rightarrow 0$ .

**Corrigé 3.** (7 points)

On note  $X$  la variable aléatoire du nombre d'essais nécessaires avant de trouver la bonne clé.

- (a) (i) (2 points) Pour que la porte ouvre au  $k$ ième essai, il faut que les  $k - 1$  premières clés choisies soient de mauvaises clés. Au premier essai, il y a une probabilité de  $(n - 1)/n$  de choisir la mauvaise clé. Au deuxième essai, la probabilité est de  $(n - 2)/(n - 1)$ , de  $(n - 3)/(n - 2)$  au troisième essai ..., de  $(n - k + 1)/(n - k)$  au  $(k - 1)$  essai. Enfin, il faut que la bonne clé soit choisie au  $k$ ième essai, ce qui correspond à une probabilité de  $1/(n - k + 1)$ . La probabilité que la porte ouvre après le  $k$ ième essai est donc égale à

$$\Pr(X = k) = \frac{n - 1}{n} \times \frac{n - 2}{n - 1} \times \dots \times \frac{n - k + 1}{n - k} \times \frac{1}{n - k + 1} = \frac{1}{n}.$$

- (ii) (2 points) En utilisant la définition de l'espérance on trouve

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \Pr(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n + 1}{2}.$$

- (b) (i) (2 points) A chaque essai, la probabilité de choisir la bonne clé est de  $1/n$ . Le nombre d'essais nécessaires  $X$  suit donc une loi géométrique de paramètre  $1/n$ . La probabilité que la porte ouvre après le  $k$ ième essai vaut donc

$$\Pr(X = k) = \frac{1}{n} \left( \frac{n - 1}{n} \right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- (ii) (1 point) D'après le cours, l'espérance de la loi géométrique de paramètre  $1/n$  vaut

$$E(X) = n.$$

**Corrigé 4.** (9 points)

(a) (2 points) La fonction  $f_{X,Y}$  est positive et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 c(x+y) dx dy \\ &= c \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^1 dy \\ &= c \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + y \right) dy \\ &= c \left[ \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dy \\ &= c \times 1 = c.\end{aligned}$$

Ainsi,  $f_{X,Y}$  est une densité conjointe avec  $c = 1$ .

(b) (2 points) La densité de la note au test  $X$  est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = \frac{1}{2} + x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

La fonction de répartition de  $X$  est donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ (x^2 + x)/2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

(c) (1 point) Non car  $f_{X,Y}$  ne peut pas se factoriser en un produit de fonctions de  $x$  et de  $y$ .

(d) (2 points) On cherche

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x}{2} + x^2 \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \approx 0.58.\end{aligned}$$

(e) (2 points) On cherche

$$\begin{aligned}\Pr(X + Y \geq 1) &= 1 - \Pr(X + Y \leq 1) = 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y) dy dx \\ &= 1 - \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\ &= 1 - \int_0^1 (x - x^2 + 1/2 + x^2/2 - x) dx \\ &= 1 - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$