

EPFL

Probabilités et Statistique pour Informatique et Communications,
2012–2013, Semestre 2.

Probabilités et statistique : Test

15 avril 2013

Durée : L'examen commence à 16:15 et se termine à 18:00.

Nom :

Prénom :

No. SCIPER :

Exercice	Points	Barème indicatif
1		/7 points
2		/6 points
3		/7 points
4		/9 points
Total :		/29 points

REMARQUES:

- Aucun document personnel n'est autorisé.
- Les calculatrices simples sont permises.
- Merci d'écrire vos réponses directement sur les feuilles d'examens; si vous manquez de place, utiliser les feuilles vides se trouvant à la fin de l'examen. Aucune feuille supplémentaire ne sera acceptée!

Exercice 1. On considère le jeu suivant : on lance une pièce (bien équilibrée) et on note x le résultat du jet. Si le jet est pile, on lance un dé à 6 faces non truqué, sinon on lance un dé truqué pour lequel les probabilités d'obtenir 1 ou 2 sont de $1/4$ et les probabilités d'obtenir 3, 4, 5 ou 6 sont de $1/8$. On note y le résultat du jet de dé. Le résultat du jeu est le couple (x, y) des deux jets.

- (a) Quel est l'ensemble fondamental Ω correspondant à cette expérience ?
- (b) Calculer les probabilités associées à chacun des événements élémentaires de Ω .
- (c) Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 au jet de dé ?
- (d) Sachant que le jet de dé a donné un 1, quelle est la probabilité que le dé utilisé soit truqué ?

Exercice 2. On souhaite étudier un test de dépistage d'une maladie rare affectant en moyenne une personne sur 1000. Le test consiste à faire subir une expérience au patient afin de déterminer son temps de réaction à un stimulus. Le test est dit positif si ce temps de réaction est plus grand que 1 sec. On sait que ce temps de réaction X suit une loi de Pareto de paramètre σ ,

$$\Pr(X \leq x) = 1 - (1 + x/\sigma)^{-1}, \quad x > 0,$$

avec $\sigma = 1/49$ pour une personne saine et $\sigma = 99$ pour une personne porteuse de la maladie.

- (a) Décrire l'énoncé en terme d'événements et calculer les probabilités associées.
- (b) Le test est positif pour un certain patient. Quelle est la probabilité pour que ce patient soit effectivement porteur de la maladie ?
- (c) Discuter le résultat précédent : le test vous paraît-il assez fiable pour déterminer si une personne est porteuse ou non de la maladie ? Si non, quelle(s) probabilité(s) devrai(en)t être modifiée(s) afin d'améliorer ce test ?

Exercice 3. Un étudiant de l'EPFL rentre d'une soirée à Sat. Il dispose de n clés dont une seule ouvre la porte de son appartement mais il ne sait plus laquelle.

- (a) Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu.
 - (i) Quelle est la probabilité que la porte ouvre au k ième essai ?
 - (ii) Quel est le nombre moyen de tentatives avant de trouver la bonne clé ?
- (b) Le lendemain soir, la soirée à été plus arrosée, et l'étudiant ne pense pas à mettre de côté la mauvaise clé après l'avoir essayée.
 - (i) Donner la loi du nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé. Quelle est la probabilité que la porte ouvre au k ième essai ?
 - (ii) Quel est le nombre moyen de tentatives avant de trouver la bonne clé ?

Exercice 4. On souhaite étudier comment la note obtenue au test de Probabilités et Statistique influence celle obtenue à l'examen final. On note X la note au test et Y la note à l'examen final, toutes deux normalisées entre 0 et 1. Notre étude a révélé que X et Y ont une densité conjointe de la forme :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Montrer que $f_{X,Y}$ est bien une fonction de densité conjointe et en déduire la valeur de c .
- (b) Donner la densité et la fonction de répartition marginale de la note au test.
- (c) Les deux notes sont-elles indépendantes ?
- (d) Calculer l'espérance de la note au test.
- (e) Calculer la probabilité que la somme des deux notes excède 1.

