24.11.2025

lundi, 24 novembre 2025 07:24

Rappel: Estimation paramétrique : $X_1, \dots X_n$ une suite i.i.d. de variables/vecteurs aléatoires, on suppose que $X_i \sim \mathbb{P}_\theta$, $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ une famille de mesures de proba.

Expl : $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)} = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

But : trouver θ ou $f(\theta)$ ($f : \Theta \to \mathbb{R}$), à partir d'une réalisation $x_1, -, x_n$ de $X_1, -, X_n$

↳ Estimateurs : fonction de $X_1, -, X_n$ qui ne dépend pas de θ.

Expl : i) moyenne empirique : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

↳ estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$.

ii) Variance empirique : $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$

↳ estimateur convergent de $\mathrm{Var}(X_1)$.

Méthode des moments : Si on peut trouver h, g deux fonctions telles que

$$f(\theta) = h\left(\mathbb{E}[g(X_1)] \right)$$

$$f(\theta) = h\left(E[g(X_1)]\right)$$

↳ on construit un estimateur de $f(\theta)$ via $\hat{f}_n(X_1, \dots, X_n) = h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right)$.

Estimateur du maximum de vraisemblance :

Déf : Soit $n \geq 1$, $X_1, \dots X_n$ un échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Soit $x_1, \dots, x_n$ une réalisation de $X_1, \dots X_n$, on définit la vraisemblance de $x_1, \dots, x_n$ sachant θ par :

① Si $\mathbb{P}_\theta$ est une loi discrète :

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n \mid \theta) &= \mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(x_i) \end{aligned}$$

② Si $\mathbb{P}_\theta$ est une loi continue avec densité f_θ,

$$L(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Déf : L'estimateur du maximum de vraisemblance

$\hat{\theta}$ est l'estimateur [illegible]

est l'estimateur de θ donné par

$$MLE(X_1, \dots, X_n) = \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n \mid \theta),$$

la valeur de θ pour laquelle $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n \mid \theta)$ est maximale.

Exp[1] $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)} = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

↳ $\mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}$ est une loi continue de densité

$$f_{(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Si $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon de loi $\mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, une réalisation de $X_1, \dots, X_n$,

$$\mathcal{L}\left(x_1, \dots, x_n \mid (\mu, \sigma^2)\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{(\mu,\sigma^2)}(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

maximiser $\mathcal{L}$ est equivalent à maximiser $\ln(\mathcal{L})$:

$$\ln\left(\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n \mid (\mu, \sigma^2))\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \sum -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Pour $\sigma > 0$ fixé, le maximum en μ est atteint au point qui minimise $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

$x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2$

$\rightsquigarrow$ strict. convexe $\Rightarrow$ unique min atteint au pt critique :

$$\frac{d}{d\mu}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) = \sum_{i=1}^{n}(2\mu - 2x_i)$$

$$= 2n\mu - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \stackrel{!}{=} 0$$

$$\hookrightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

min atteint en $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv \overline{x}_n$

On doit trouver σ^2 qui maximise

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$$

$\rightsquigarrow$ même type de dérivation (pt. crit.)

on trouve que le max est atteint en

$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$ la variance empirique

On trouve donc

On trouve donc

$$MLE(X_1, \dots, X_n) = \left(\overline{X_n}, \hat{\sigma}_n^2\right) \quad \text{dans ce cas.}$$

Expl 2

Cas $X_1, \dots, X_n \sim Geo(p)$ $\left(\Theta = [0,1],\ \theta = p,\ \mathbb{P}_p = Geo(p)\right)$

Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}^*$ une réal. de $X_1, \dots, X_n$, on calcule la vraisemblance :

$$\mathcal{L}(x_1, \dots x_n \mid p) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(p(1-p)^{x_i - 1}\right)$$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

on cherche la valeur p pour laquelle $\mathcal{L}(x_1, \dots x_n \mid p)$ est maximale. On va maximiser $\ln(\mathcal{L})$ à la place, et on va poser

$$p = \frac{e^\beta}{1+e^\beta} \Rightarrow 1-p = \frac{1}{1+e^\beta}, \quad \frac{p}{1-p} = e^\beta$$

$\beta \in \mathbb{R}$.

$$\ln\left(\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n \mid p)\right) = n \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\ln\left(L(x_1,\dots,x_n \mid p)\right) = \dots \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= n\beta - \ln(1+e^{\beta}) \sum_{i=1}^{n} x_i$$

↳ méthode de pt critique, on dérive p.r. à β :

$$n - \underbrace{\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}}}_{=p} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hookrightarrow \quad n = p \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \hookrightarrow \quad p = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n}$$

On a $MLE(X_1,\dots,X_n) = \dfrac{1}{\bar{X}_n}$ dans ce cas.

Intervalles de confiance :

Déf : Soit $X_1,\dots,X_n$ un échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta, \theta\in\Theta$, et soit $g(\theta)$ une quantité à estimer. Un intervalle de confiance est un intervalle $I(X_1,\dots,X_n)$ qui ne dépend pas de θ.

Pour $\alpha \in (0,1)$, $I(X_1,\dots,X_n)$ est un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour $g(\theta)$ si

$$\mathbb{P}\left(g(\theta) \in I(X_1,\dots,X_n)\right) = 1-\alpha \qquad \forall\, \theta\in\Theta.$$

(si $\mathbb{P}\left(g(\theta)\in I(X_1,\dots,X_n)\right) \geq 1-\alpha$, on parlera d'intervalle de confiance pas excès.)

de confiance pas exacts.)

Expl: $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$

$(\Theta = \mathbb{R},\ \theta = \mu,\ \mathbb{P}_\mu = \mathcal{N}(\mu, 1))$.

On cherche un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour $\mu = \mathbb{E}[X_1]$.

$\overline{X}_n$ est. de μ $\rightsquigarrow$ on peut chercher un intervalle de la forme

$$I(X_1, \dots, X_n) = [\overline{X}_n - \delta,\ \overline{X}_n + \delta]$$

pour $\delta > 0$. On cherche la valeur de δ qui donne un niveau de confiance $1-\alpha$.

$$\mathbb{P}(\mu \in I(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{P}(\mu \in [\overline{X}_n - \delta, \overline{X}_n + \delta])$$

$$= \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \leq \delta)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \delta) \ \circledast$$

$\rightsquigarrow X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ indép. on a

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{n\mu}{n}, \frac{n}{n^2}\right) \quad \text{(lemme 2.6.7)}$$

$$= \mathcal{N}\left(\mu, \tfrac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X}_n - \mu \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\circledast = 1 - \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\,|\overline{X}_n - \mu| > \sqrt{n}\,\delta\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(|Z| > \sqrt{n}\,\delta\right) \qquad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On voulait $\mathbb{P}(\mu \in I(X_1, \dots, X_n))$

$$= 1 - \mathbb{P}(|Z| > \sqrt{n}\,\delta) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow$ on cherche $\delta > 0$ t.q.

$$\mathbb{P}\left(|Z| > \sqrt{n}\,\delta\right) = \alpha$$

$$\| $$

$$2\,\mathbb{P}(Z > \sqrt{n}\,\delta) = 2\left(\tfrac{1}{2} - \mathbb{P}(Z \in [0, \sqrt{n}\,\delta])\right)$$

$\rightsquigarrow$ il existe des tables des nombres a, b tels que

$$\mathbb{P}(Z \in [0, a]) = b$$

Si on prend $\alpha = 10\% = 0.1$, on cherche δ t.q.

$$\mathbb{P}(Z \in [0, \sqrt{n}\,\delta]) = 45\%$$

$$\hookrightarrow \quad \delta\sqrt{n} = 1.64 \quad \hookrightarrow \quad \delta = \frac{1.64}{\sqrt{n}}$$

§