10.11.2025

lundi, 10 novembre 2025 08:09

Rappel: Inégalités: 1) Chebychev: pour $p>0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|^p]}{a^p}$$

↳ déduit wLLN: si $X_1, X_2, \ldots$ sont id. distrib. et non-corrélés, $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E[X_1]\right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon}$$

avec $\sigma^2 = Var(X_1)$.

2) Cauchy-Schwarz:

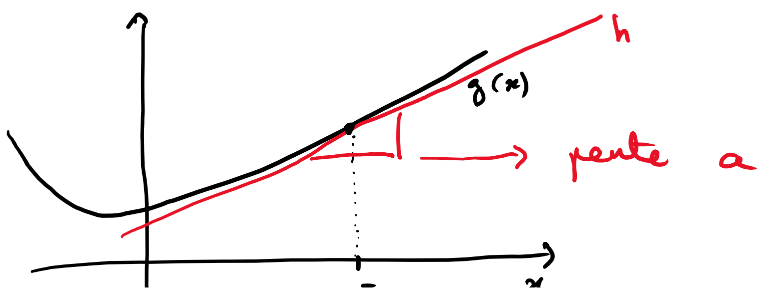
$$E[XY]^2 \leq E[X^2]\,E[Y^2].$$

Inégalité de Jensen: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. $g: I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors, pour tout var. al X telle que $\mathbb{P}(X \in I) = 1$,

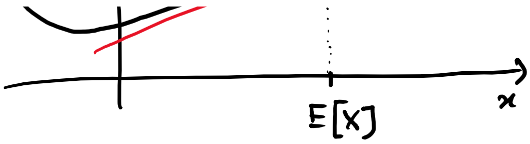
$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

Si g est concave, on a l'inégalité inverse.

Prv:



$\leq g$.



$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in I, \quad g(y) \geq \underbrace{g(E[X]) + a(y - E[X])}_{h(y)}$$

$$g(X) \geqslant h(X) \quad \text{comme var. al.}$$

$$\Rightarrow \quad E[g(X)] \geq E[g(E[X])] + E[a(X - E[X])]$$

$$= g(E[X]) + a(E[X] - E[X])$$

$$= g(E[X])$$

$\square$

<u>Expl</u> : $\quad E[X^2] \geqslant E[X]^2 \quad \Rightarrow \quad Var(X) \geq 0.$

<u>Chapitre 3 : Convergence de var. al.</u>

<u>Rappel</u> : Analyse I : $\quad a_n \to a \quad$ si $\quad |a_n - a| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

<u>Expl</u> : on regarde la suite de v.a. $X_n \sim \delta_{1/n}$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1.$$

On aimerait a minima que $X_n \to X$ avec $X \sim \delta_0$.

On aimerait :

$$\text{« } X_n \to X \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(X_n \in A) \longrightarrow \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \subset \mathbb{R} \text{ »}$$

mais dans l'exemple :

$$\mathbb{P}(X_n > 0) = 1$$

mais $$\mathbb{P}(X > 0) = 0$$

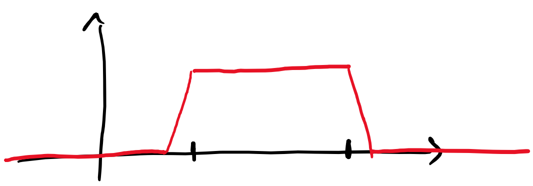
<u>Déf (convergence en loi)</u> : On dit qu'une suite de v.a $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a X si un des deux points équivalents suivants est vérifié :

i) $\forall t \in \mathbb{R}$ t.q. F_X est continue en t,

$$F_{X_n}(t) \longrightarrow F_X(t) .$$

ii) $\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$E[\varphi(X_n)] \longrightarrow E[\varphi(X)] .$$



on notera : $$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X .$$

<u>Rem</u> : le points 2 continue de faire du sens

Rem: le points 2 continue de faire du sense pour $X_1, X_2, \dots$ des vecteurs al.

↳ définit la convergence en loi pour des suites de vect. al.

Rem: Si X est une variable aléatoire continue, on a F_X est continue et $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{P}(X \in (a,b)) = \mathbb{P}(X \in [a,b])$. On aura alors $X_n \xrightarrow{loi} X$ est équivalent à :

$\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $\mathbb{P}(X_n \in I) \to \mathbb{P}(X \in I)$.

Théorème: Si $\exists \delta > 0$ tel que
- $E[e^{tX_i}] < \infty \quad \forall |t| < \delta, \forall i$
- $E[e^{tX}] < \infty \quad \forall |t| < \delta$,

alors, $E[e^{tX_n}] \xrightarrow{n \to \infty} E[e^{tX}] \quad \forall |t| < \infty$

implique
1. $X_n \xrightarrow{loi} X$
2. $E[X_n^p] \to E[X^p] \quad \forall p \geq 1$.

Très utile pour étudier la convergence vers $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Expl : ① $X_n \sim \text{Bern}(p+1/n)$, $X \sim \text{Bern}(p)$.

montrons que $X_n \xrightarrow{loi} X$:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = (1-p)\mathbb{1}_{t\geq 0} + p\,\mathbb{1}_{t\geq 1}$$

$\hookrightarrow$ F_X est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Soit $t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = (1-p-1/n)\mathbb{1}_{t\geq 0} + (p+1/n)\mathbb{1}_{t\geq 1}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} (1-p)\mathbb{1}_{t\geq 0} + p\,\mathbb{1}_{t\geq 1} = F_X(t).$$

$\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{loi} X$

② $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$

On sait que $E[e^{tX_n}] < \infty$ $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall n\geq 1$

et $E[e^{tX_n}] = e^{t^2 \cdot \mathrm{Var}(X_n)/2} = e^{t^2/2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Quelle variable X a $E[e^{tX}] = 1$ $\forall t\in\mathbb{R}$?

$X \sim \delta_0$.

Donc $\mathcal{N}(0, 1/n) \xrightarrow{loi} \delta_0$ "$= \mathcal{N}(0,0)$".

Lemme : Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. telle que $\mathbb{P}(X\in\mathbb{Z})=1$.
(en part. ok si $\mathrm{Image}(X) \subset \mathbb{Z}$). Alors

(en part. ok si $\text{Image}(X) \subset \mathbb{Z}$). Alors

$X_n \xrightarrow{loi} X$ est équivalent à

« $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in (k-\varepsilon, k+\varepsilon)) = \mathbb{P}(X=k)$ ».

__Déf:__ (Convergence en Probabilités)

Une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables al. converge en proba. vers une variable aléatoire X si $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

↳ le mode de convergence pour faire de l'estimation statistique.

__Expl:__ la wLLN donne la convergence en proba de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vers $E[X_1]$ pour des v.a. id distr. et non-corr.

__Déf__ (Convergence presque-sûre)

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers une v.a. X si si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0\right) = 1$$

De manière équivalente, $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{m\geqslant n} |X_m - X| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Déf : (convergence dans L^p)

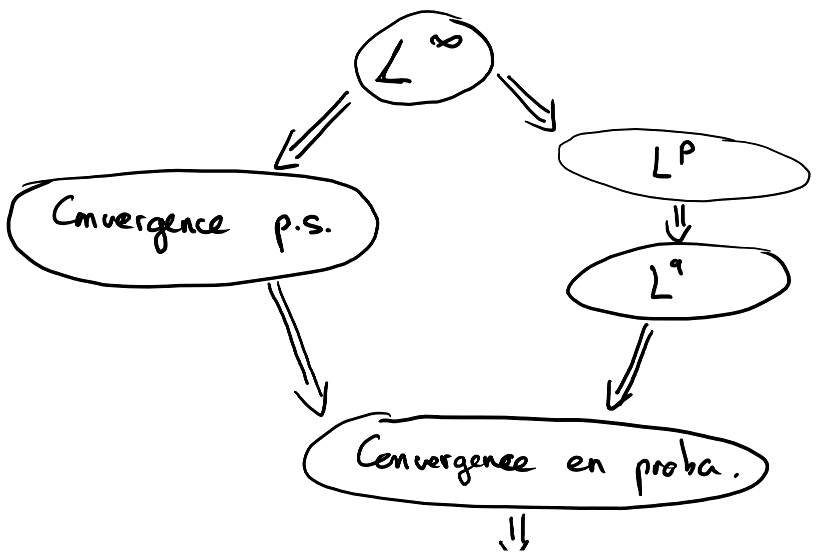
Une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans L^p vers une var. al. X, noté $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0$$

Rem : par Chebychev :

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right]}{a^p}$$

Hiérachie des modes de convergence :



$p \geqslant q \geqslant 1$.

(convergence en proba.)

$\Downarrow$

(Convergence en loi)

<u>Rem</u>: $L^p \Rightarrow$ proba donne plus : on obtient une version quantitative (comme dans la wLLN).

<u>Théorèmes limites</u>:

<u>Cadre</u>: On répète une expérience plein de fois. On fait une mesure μ à chaque fois.

X la variable qui représente la mesure μ.

$X_1, X_2, X_3, \dots$ seront les mesures faites dans la suite d'expérience.

$\hookrightarrow$ On supposera $X_1, X_2, \dots$ est une suite idenpendente de variables identiquement distrib. ($X_i \overset{loi}{=} X_j \overset{loi}{=} X \ \forall i,j$).

<u>But</u>: Approximer X via

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{la moyenne empirique.}$$

<u>Rappel</u>: $$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\,E[X]$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \underset{id.\ dist.}{\overset{indep}{=}} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1} X_i\Big) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1} \mathrm{Var}(X_i) \overset{\text{id. dist.}}{=} n \, \mathrm{Var}(X)$$

LLN: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E[X]$ convergence vers une Dirac.

CLT: $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - E[X]\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathrm{Var}(X)\right)$.