Rappel :

modéliser

situation/expérience

↳ Ω esp. de réal.

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ mesure

événements

mesure $\in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ dans une expérience

↳ variables aléatoires

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

loi de X :

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$$
$$A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$$

Indépendance : événements $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

v.a. $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$
$= \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$

Sur v.a. X :
- l'espérence de X : $E[X]$
- Variance : $\mathrm{Var}(X)$

charactérisent la loi de X
- Fonction de rép. $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$
- Fonction gén. des moments : $M_X(t) = E[e^{tX}]$

Variables aléatoires "classiques"

Ω sera un esp. de réalisations abstrait.

Ω sera un esp. de réalisations abstrait.
$\mathbb{P}$ -"— une mesure de proba abstraite.

Variables discrètes:

Variable constante: $X : \Omega \to \mathbb{R}$
$\omega \mapsto c$

La loi de X est une mesure de Dirac

$$\delta_c : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } c \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A) =$

Variable de Bernoulli: $p \in [0,1]$,

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. de Bernoulli de paramètre p si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$$

Expl: $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ évènement,

$$\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$$ est une
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

var. al. de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Notation: on notera $X \sim \mathrm{Bern}(p)$ pour "X suit une loi de Bernoulli de paramètre p."

Variable aléatoire binomiale :

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable al binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{1}_{\{0,\dots,n\}}(k)\; p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$$

avec $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ n,k grands, Stirling

Lemme: Si X suit une loi Binomiale de paramètres n, p ($X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$), et $Y_1, \dots, Y_n$ sont une suite indépendantes de $\mathrm{Bern}(p)$, alors

$$X \overset{\text{loi}}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

(Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Binomiale : nombre de fois qu'un événement se produit dans une suite d'expériences identiques et indép.

Variable aléatoire géométrique :

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in [0,1]$, notée $X \sim Geo(p)$, si

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(k)\,(1-p)^{k-1}\,p .$$

La loi géométrique est le nombre d'expériences effectuées avant une réussite.

Lemme : Si $X \sim Geo(p)$, et $Y_1, Y_2, \dots$ indép. $Y_i \sim Bern(p)$,

$$X \overset{loi}{=} 1 + \underbrace{\sum_{n \geq 1} \overbrace{\prod_{i=1}^{n} (1 - Y_i)}^{\mathbb{1}_{Y_1 = Y_2 = \dots = Y_n = 0}}}_{\text{\# de zéros avant le } 1^{er} \ 1 \text{ dans } (Y_1, Y_2, \dots)}$$

Rem: on rencontre parfois la déf de la géom avec

$$\mathbb{1}_{\underset{\mathbb{N}^*}{\mathbb{N}}}(k)\ (1-p)^{\overset{}{\underset{k-1}{k}}}\ p$$

$\rightsquigarrow$ nb d'échecs avant le première réussite.

Lemme (perte de mémoire) Si $X \sim Geo(p)$, alors

$\forall\, n > k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n \mid X > k) = \mathbb{P}(X = n-k).$$

De façons équiv., sous la loi $\mathbb{P}(\cdot \mid X > k)$, la v.a. $X-k \sim Geo(p)$.

Preuve: On commence par calculer pour $a \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X \leq a) = 1 - \mathbb{P}(X > a) = 1 - (1-p)^a \text{ car}$$

$$\mathbb{P}(X > a) \overset{\text{proba tot.}}{=} \sum_{k=a+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=a+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$\overset{k'=k-1}{=} p \sum_{k'=a}^{\infty} (1-p)^{k'} = p(1-p)^a \sum_{k'=a}^{\infty} (1-p)^{k'-a}$$

$$\overset{k''=k'-a}{=} p(1-p)^a \sum_{k''=0}^{\infty} (1-p)^{k''}$$

série géom: $= \dfrac{1}{1-(1-p)} = \dfrac{1}{p}$

$$= (1-p)^a$$

Maintenant, pour $n > k$,

$$\mathbb{P}(X = n \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X=n,\ X>k)}{\mathbb{P}(X>k)}$$

$$\overset{n>k}{=} \frac{\mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(X>k)}$$

$$\overset{\text{calcule d'avant}}{=} \frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^k}$$

$$= p(1-p)^{(n-k)-1}$$

$$= \mathbb{P}(X = n-k)$$

$\boxtimes$

Variable aléatoire de Poisson:

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda \in [0, +\infty)$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Les v.a. de Poisson sont charactérisées par

Lemme: Les points suivants sont équivalents

① $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$,

② $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{\lambda}{k+1}}$$

utile pour estimer λ avec des "méthodes stat".

Variable aléatoire uniforme (sur ens. fini)

Soit $J \subset \mathbb{R}$ fini, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable uniforme sur J, notée $X \sim \text{Unif}(J)$, si $\forall A \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|J \cap A|}{|J|}.$$

Notons que
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A \cap J).$$

On a que pour $I \subset J$,

$$\mathbb{P}(X \in A \mid X \in I) = \frac{|A \cap I|}{\dots}$$

$$\mathbb{P}(X \in A \mid X \in I) = \frac{|A \cap I|}{|I|}$$

$\rightsquigarrow$ unif sur I.

<u>Utilisation</u>: Si on sait qu'une mesure prend valeur dans un ensemble fini mais que l'on a pas plus d'info,

$\rightsquigarrow$ loi uniform / v.a. uniforme.

La loi uniforme est celle avec la plus petite capacité prédictive.

Variables aléatoires continues

<u>Variables uniformes sur un intervalle</u>:

pour $a < b \in \mathbb{R}$, X est une var. al. uniforme sur $[a, b]$, noté $X \sim \mathrm{Unif}([a,b])$, elle a une densité donnée par

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \cdot \frac{1}{b-a}$$

Propiété de cond. similaire aux unif finies:

<u>Lemme</u>:

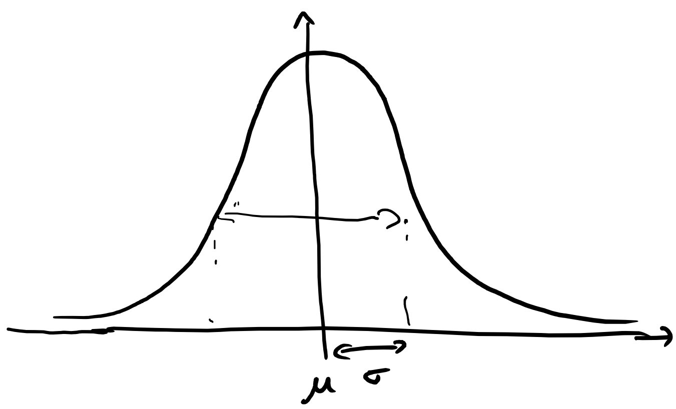
Lemme : Soit $a < b < c < d$, $X \sim \text{Unif}([a,d])$

Alors, $\forall\ b \leq t_1 < t_2 \leq c$,

$$\mathbb{P}\left(X \in [t_1, t_2] \mid X \in [b,c] \right) = \frac{t_2 - t_1}{c - b}$$

I.e. : sous $\mathbb{P}(\cdot \mid X \in [b,c])$, X est une unif sur $[b,c]$.

Variable aléatoire gaussienne



X est une variable aléatoire gaussienne de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, si elle a une densité donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exos :

$$E[X] = \mu \quad , \quad Var(X) = \sigma^2$$

$$E[e^{tX}] = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

Les lois gaussiennes se comportent bien sous les sommes.

Lemme : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, indép. alors,

1. la v.a. $\bar{X} = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ a une loi $\mathcal{N}(0,1)$. $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{loi normale centrée réduite.}}$

2. Si on regarde $Z = X + Y$, alors, $Z \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Cas part. de 2 : Si $X_1, X_2, \ldots \sim \mathcal{N}(0,1)$ indép.

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$