Rappel: Espérance: 1) Ω fini ou dén $\rightsquigarrow$ $p : \Omega \to [0,1]$ fct de masse, v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_p[X] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega)$$

2) $\Omega = \mathbb{R}^d \rightsquigarrow f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ densité.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$$\mathbb{E}_f[X] = \int_{\mathbb{R}^d} X(x) f(x) dx$$

Cas 2: Si on connait la loi de X :

1) X est discrète : $\mathbb{P}(X \in D_X) = 1$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in D_X} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

2) X continue avec densité f_X :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) dx$$

Thm:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in D_X} \mathbb{P}(X = x) \, g(x) & \text{cas disc.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{cas cont.} \end{cases}$$

Vecteur al: $(X_1, \dots, X_d)$, $X_1, \dots, X_d$ v.a.

$(X_1, \dots, X_d)$, $X_1, \dots, X_d$ v.a.

$$E[(X_1, \dots, X_d)] = (E[X_1], \dots, E[X_d])$$

v.a.	vect. al
$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$	$F_X(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_d \leq t_d)$

<u>Formule de changement de variable</u>

<u>Situation</u> : X vect. al. continue, $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

<u>Q?</u> si on connait la loi de X, que peut-on dire sur la loi de $\varphi(X)$?

<u>Rappel</u> : $\varphi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^d$ ouverts

*) φ est cont. différentiable si

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, \dots, x_d) \text{ existe et est continue}$$

$\forall i = 1, \dots, d$.

*) Matrice Jacobienne de φ :

$$D_\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_d(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}$$

où $\varphi(x_1, \dots, x_d) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_d), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_d))$

*) det le determinant d'une matrice.

<u>Thm</u>: Soit $d \geq 1$, $U, V \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts et $\varphi : U \to V$ une bijection cont. diff. telle que $\det D\varphi(x) \neq 0$ $\forall x \in U$.

Alors, $\forall f : V \to \mathbb{R}$ on a

$$\int_U dy_1 \dots dy_d \, f(\varphi(y)) \, |\det D\varphi(y)| = \int_V dx_1 \dots dx_d \, f(x).$$

<u>Corollaire</u>: $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire et φ comme dans le théorème. Si X est continue avec densité f_X, alors $Y = \varphi(X)$ est un vect. al. continue avec densité:

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \underbrace{|\det D\varphi^{-1}(y)|}_{= \frac{1}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}}$$

$\overline{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}$

Cas $d = 1$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y)).$$

Expl : Soit X une v.a. uniforme sur $[0,1]$: X est continue avec densité

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

$Y = a + rX$ une autre v.a.

Calculons la loi de Y. Par le cor :

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}$$

avec $\varphi(x) = a + rx$, $\varphi^{-1}(y) = \frac{y-a}{r}$

$\varphi'(x) = r$

$$\hookrightarrow f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{y-a}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}$$

$$= \mathbb{1}_{[0,r]}(y-a) \cdot \frac{1}{r}$$

$$= \mathbb{1}_{[\ldots]}(y) \cdot \frac{1}{\ldots}$$

$$= \mathbb{1}_{[a, r+a]}(y) \cdot \frac{1}{r}$$

$\leadsto$ Y est une v.a. uniforme sur $[a, r+a]$.

Moments et fonction génératrice des moments

Def pour $p > 0$, le moment d'ordre p d'une v.a. X est $\mathbb{E}[X^p]$.

⚠ n'est défini que si $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

Dans ce cours: $p \in \mathbb{N}^*$.

Intérêt: $\mathbb{E}[X^p]$ est définie si $\mathbb{P}(|X| \geq K)$ tend vers 0 assez vite avec K.

Si $f_X(x) = c_\alpha \dfrac{1}{(1+x)^\alpha} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x)$,

Pour quels α, X admet-elle un moment d'ordre p ?

Pour que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, on veut

veut

$$E\left[|X|^p\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_X(x)\,dx = c_\alpha \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^\alpha}\, x^p\, dx < \infty$$

l'int. est finie s.s.i $\int_1^\infty x^{p-\alpha}\,dx < \infty$

ssi $p-\alpha < -1 \iff \alpha > p+1$.

Rem: Admettre un moment d'ordre p donne de l'info sur les queues de distribution de X.

Question: Si on sait $E[|X|^p] < \infty$ $\forall p \in \mathbb{N}$,
et on sait calculer $E[X^p]$ $\forall p \, \mathbb{N}$.
Connait-on la loi de X ?

Réponse: en général non! mais...

Déf: On dit que X admet des moments exponentiels si il existe $\delta > 0$ t.q.

$$E\left[e^{tX}\right] < \infty \quad \forall |t| < \delta.$$

Dans ce cas, $\left(E[X^p]\right)_{p\geq 1}$ caractérise la loi de X. En particulier, si X est bornée.

exponentiels si il existe $\delta > 0$ t.q.

$$E[e^{tX}] < \infty \quad \forall\, |t| < \delta.$$

Dans ce cas, $(E[X^p])_{p\geq 1}$ caractérise la loi de X. En particulier, si X est bornée.

Déf: Fonction génératrice des moments de X :

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Thm: Si $\exists\, \delta > 0$ t.q. $M_X(t) = M_Y(t)$ $\forall\, |t| < \delta$,

Alors X a la même loi que Y.

Exo: $M_X(t) < \infty$ pour $|t| < \delta \Rightarrow E[|X|^p] < \infty$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

Un petit calcule formel:

$$E[e^{tX}] = E\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(tX)^n}{n!}\right] = \sum_{n\geq 0} E\left[\frac{(tX)^n}{n!}\right]$$

$$= \boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} E[X^n]}$$

Expl: On joue à pile ou face, on gagne 1CHF si pile et perd 1 CHF si face.

si pile ou perd 1 CHF si face.

$\hookrightarrow$ $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$, $p(\text{Pile}) = p(\text{Face}) = 1/2$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\text{Pile}) = 1$, $X(\text{Face}) = -1$.

$$E[X] = 0 \quad , \quad E[X^p] = (X(\text{Pile}))^p p(\text{pile}) + (X(\text{Face}))^p p(\text{Face})$$

$$= 1^p \frac{1}{2} + (-1)^p \frac{1}{2}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{pour } p \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } p \text{ impair} \end{cases}$$

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = p(\text{Pile})\, e^{t X(\text{Pile})} + p(\text{Face})\, e^{t X(\text{Face})}$$

$$= \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t} = \cosh(t)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \mathbb{1}_{n \text{ pair}}$$

Proba conditionnelles

Situation: On joue au poker Texas Hold'em.

On veut comprendre l'influence d'infos sur nos chances de gain.

① aucune info $\hookrightarrow$ Proba unif sur les parties

② on tire $A_\heartsuit A_\diamondsuit$ $\hookrightarrow$ plus proba unif

$\mathbb{P}(\text{Gagner}) \leftrightarrow$ fréquence de gain $\leftrightarrow \dfrac{\#\text{ gagnées}}{\#\text{ parties}}$

$\mathbb{P}(\text{Gagner} \mid A_\heartsuit A_\diamondsuit) \leftrightarrow$ fréquence de gain parmi les parties où j'ai obtenu $A_\heartsuit A_\diamondsuit$

$$= \frac{\#\text{ gagnées avec } A_\heartsuit A_\diamondsuit}{\#\text{ jouées avec } A_\heartsuit A_\diamondsuit}$$

$$= \frac{\#\text{ gagnée avec } A_\heartsuit A_\diamondsuit}{\#\text{ parties}} \cdot \frac{\#\text{ parties}}{\#\text{ jouées avec } A_\heartsuit A_\diamondsuit}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{Gagner et } A_\heartsuit A_\diamondsuit)}{\mathbb{P}(A_\heartsuit A_\diamondsuit)}$$

$\hookrightarrow$ on va définir la proba de A conditionnelement à B par

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$