Cours 1

lundi, 8 septembre 2025 07:27

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{\text{fail !}} \qquad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6}_{\text{passe}}$$

Espace de réalisations :

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Fréquences réelles de réalisations :

$$p_i = \mathbb{P}(\text{dés donne } i) \rightsquigarrow \text{probabilités}$$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1 \quad , \quad p_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$\mathbb{P}(\text{passer l'année}) = p_4 + p_5 + p_6$$

$$= \mathbb{P}(\text{dés} \in \{4, 5, 6\})$$

$$= \mathbb{P}(\text{dés} \in \{4\} \cup \text{dés} \in \{5\} \cup \text{dés} \in \{6\})$$

$$= \mathbb{P}(\text{dés} \in \{4\}) +$$

$= P(\text{dés} \in \{4\}) + \dots$

↳ estimation des paramètres :

On lance 1'000'000 de fois le dès

et on déf :

$$\hat{p}_i = \frac{\#\{\text{lancées } i\}}{\#\{\text{lancées}\}}$$

Loi lemotes : $\hat{p}_i \to p_i$ quand $1'000'000 \to \infty$.

Visualiser les proba : cf notes.

Echantillonage uniforme : sur n éléments

Espace des réalisations :

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$$

Evénements : ensemble de réalisations :

$$A \subset \Omega$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subset \Omega\}$$

Mesure de probabilité : $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

uniforme : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

$|\cdot|$ cardinal.

Expl : $n = 6 \Leftrightarrow$ dés équil.

$$p_i = \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

Propriétés : Additivité : si $A, B \subset \Omega$ sont t.q. $A \cap B = \emptyset$

alors, $\mathbb{P}(A \cup B) = \dfrac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \dfrac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{|\Omega|} + \dfrac{|B|}{|\Omega|}$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Quand on veut calculer la proba d'un événement A sous $\mathbb{P}$, on va dire que les éléments de A sont "cas favorables" et donc on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas total}}$$

Apprendre à compter : (Sec. 1.5.2)

1) listes à valeurs dans A :

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} \qquad |A^n| = |A|^n$$

2) Permutations / ordre / bijections de n éléments

$(\mathfrak{S}_n)$ nombre $= n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$

$$0! = 1.$$

3) listes ss. rép. de long k en utilisant n éléments :

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{}$$

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4) Choisir k éléments parmis n él. :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Chapitre 2 :

Mesure de proba :

- espace de réalisations :

$$\Omega$$

- événements possibles :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subset \Omega\}$$

- mesures de proba :

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

qui satisfait :

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) Si $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ sont tels que $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

De 1) et 2), on déduit

- $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $A, B \subset \Omega$,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

et bien plus, voir Théorème 2.1.1.

On verra surtout :

- espaces de proba discret : Ω fini ou dénombrable
- espaces de proba continus : $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$