
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 9

Exercice 1. Soit $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire admettant une densité. Soit E un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension strictement inférieure à n . Montrez que $\mathbb{P}(\bar{X} \in E) = 0$. En déduire en particulier que $\mathbb{P}(X_i = X_j \text{ pour certains } i \neq j) = 0$.

Exercice 2. Soit $\bar{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien de moyenne $\bar{\mu}$ et matrice de covariance C , i.e. de densité jointe

$$f_{\bar{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(C)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{\mu})^T C^{-1}(\bar{x} - \bar{\mu})\right).$$

Montrez que si $\bar{Y} = (Y_1, Y_2)$ est un vecteur gaussien standard de moyenne 0 et matrice de covariance égale à la matrice identité, alors on peut toujours trouver une matrice 2×2 A et un vecteur bidimensionnel b tels que $X = (X_1, X_2)$ ait la même loi que $AY + b$.

Exercice 3. Montrez que l'espérance d'une variable aléatoire Binomiale $Bin(n, p)$ est égale à np . Montrez également qu'une variable aléatoire géométrique de paramètre $0 < p \leq 1$ est intégrable et que son espérance est égale à $1/p$.

Exercice 4. L'espérance est seulement un paramètre d'une variable aléatoire. Ainsi l'on ne peut pas tirer trop de conclusions sur une variable aléatoire juste à partir de la connaissance de celle-ci comme nous l'allons montrer ci-dessous. En considérant des variables aléatoires discrètes :

- Trouvez une variable aléatoire intégrable X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$, mais $\mathbb{P}(X = 0) = 0$;
- Trouvez une variable aléatoire intégrable X telle que $\mathbb{E}(X) = 1$, mais $\mathbb{P}(X = 0) \geq 0.9999$;
- De même, trouvez une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{E}(X) \leq 0.0001$, mais telle que X puisse prendre des valeurs arbitrairement grandes;
- Trouvez une variable aléatoire intégrable telle que $\mathbb{E}(X) = 1$, mais avec $\mathbb{P}(X < 0) > \mathbb{P}(X > 0)$;
- Démontrez que pour toute variable aléatoire discrète positive X , si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Exercice 5. [Propriétés de base de l'espérance] Le reste de la Proposition 4.4. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes intégrables. Alors l'espérance satisfait les propriétés suivantes :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$;
- si $X \geq 0$ (i.e. $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$;
- si $X \geq Y$ (i.e. $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1$), alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$. En déduire que si $\mathbb{P}(c \leq X \leq C) = 1$, alors $c \leq \mathbb{E}(X) \leq C$;
- on a $\mathbb{E}(|X|) \geq |\mathbb{E}(X)|$.

Exercice 6. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes intégrables et indépendantes. Montrez que XY est intégrable et que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.