INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 8

Exercice 1. [Variables aléatoires de Poisson] Soi·en·t $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$ et $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité.

— Démontrer que $X_1 + X_2$ est également une variable aléatoire de Poisson avec paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

— Soi·en·t maintenant $Y_1, Y_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes de loi $Ber(p)$ définies sur le même espace de probabilité. Montrer que $X := \sum_{i=1}^{X_1} Y_i$ est une variable aléatoire et qu'elle suit également la loi $Poi(p\lambda)$. Montrer que de plus $X_1 - X$ suit la loi $Poi((1-p)\lambda)$ et est indépendante de X.

Exercice 2. Existe-t-il une variable aléatoire X prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que si X_1, X_2 sont des copies indépendantes ayant la loi de X, alors $X_1 + X_2$ ait la loi de X ?

Exercice 3. Soi·en·t X une variable aléatoire continue et $S \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Montrez que $\mathbb{P}(X \in S) = 0$. Trouvez un exemple d'une variable aléatoire continue X et d'un ensemble $R \subseteq \mathbb{R}$ tels que R ne contienne aucun intervalle de longueur positive mais $\mathbb{P}(X \in R) = 1$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

— On dit qu'une variable aléatoire continue Y est sans mémoire si pour tout $x, y > 0$, on a $\mathbb{P}(Y > x + y \mid Y > y) = \mathbb{P}(Y > x)$. Montrez qu'une variable aléatoire exponentielle est sans mémoire. Réciproquement, démontrez que toute variable aléatoire positive, continue et sans mémoire suit la loi exponentielle.

— Montrez que $\lfloor X \rfloor + 1$ est une variable aléatoire. Quelle est sa loi ?

Exercice 5. Soit X_{μ,σ^2} une variable aléatoire gaussienne et X une variable aléatoire gaussienne standard. Montrer que $\sigma X + \mu$ a la même loi que X_{μ,σ^2}.

Exercice 6. Soit $\overline{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et considérons $F_{\overline{X}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ sa fonction de répartition. Exprimer pour tous $a_i < b_i$ la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{X}}\left((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]\right)$ en utilisant $F_{\overline{X}}$. En déduire que la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire vérifie les 5 items de la Definition 3.18 des notes de cours.

Est-il possible de trouver une fonction $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, vérifiant les quatre premiers items de la Definition 3.18 mais qui ne soit pas la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire ?