

---

**INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS**  
**Série 5**

---

**Exercice 1.** Soient  $X_1, X_2, \dots$  des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Montrer que  $X_1, X_2, \dots$  sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout  $m \geq 2$ , et pour tout  $m$ -uplets  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ , on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq j \leq m} \{X_j \leq a_j\}\right) = \prod_{1 \leq j \leq m} \mathbb{P}(X_j \leq a_j).$$

**Exercice 2.** Reprenons l'exemple du graphe aléatoire d'Erdős-Rényi  $G_{n,p}$  vu en cours.

- Montrer que lorsque  $p = 1/2$ , on retrouve la probabilité uniforme sur l'ensemble des graphes à  $n$  sommets.
- On suppose que  $p = p_n \leq n^{-2}$ . Montrer que la probabilité que  $G_{n,p_n}$  soit connexe tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 3.** Soient  $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), \mathbb{P}_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , des espaces probabilisés discrets. Montrer que la mesure de probabilité produit  $\mathbb{P}_\Pi$  sur  $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \mathcal{F}_\Pi)$  existe et est unique.

**Exercice 4.** Considérons un pigeon solitaire sur  $\mathbb{Z}^2$  : à chaque étape, il fait un pas vers le haut, le bas, la droite ou la gauche avec probabilité respectivement  $p_u, p_d, p_r, p_l \in [0, 1]$ , où  $p_u + p_d + p_r + p_l = 1$ . De plus, on suppose que les pas sont indépendants. Construire l'espace probabilisé associé à la "marche" à  $n$  pas, et calculer la probabilité que le pigeon soit de retour en 0 après  $2n$  pas.

**Exercice 5.** Thomas Bayes a considéré l'exemple suivant : supposons que chaque semaine, la même loterie a lieu avec les mêmes règles, qui sont que parmi les 10000 billets vendus une proportion  $p$  d'entre eux gagne. En tant que joueur.se invétéré.e, vous ne savez pas quelle est la proportion  $p$  de billets gagnants dans cette loterie, vous savez seulement qu'elle est soit de  $1/3$  soit de  $2/3$ . Maintenant, vous avez joué  $n$  fois et gagné  $m$  fois : pouvez-vous alors dire quelque chose sur ce paramètre  $p$  ?

Pour analyser cette situation, on considèrera l'univers  $\Omega = \{1/3, 2/3\} \times \{0, 1\}^n$ , consistant en la probabilité (inconnue) de gagner et la suite des  $n$  gain/perte. On peut le munir de la tribu  $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ .

### 0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

**Exercice 6.** À chaque  $x \in [0, 1[$ , on associe son développement dyadique  $x = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} x_i$ , et on rend ce développement unique en demandant qu'il ne se termine pas par une suite infinie de 1. Montrer que l'application  $f : [0, 1[ \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  définie par  $f(x) = (x_1, x_2, \dots)$  est injective et mesurable de  $([0, 1[, \mathcal{F}_B)$  vers  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{F}_\Pi)$ , au sens où pour tout  $E \in \mathcal{F}_\Pi$ , on a  $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_B$ . De même, montrer que l'application  $g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow [0, 1[$  donnée par  $(x_1, x_2, \dots) \rightarrow \sum_{i \geq 1} 2^{-i} x_i$  est surjective et mesurable.

**Exercice 7.** Pour tout  $i \geq 1$ , soient  $\Omega_i = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{F}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$  et  $\mathbb{P}_i(0) = \mathbb{P}_i(1) = 1/2$ . En utilisant la correspondance dyadique de l'exercice précédent, et en supposant l'existence de la mesure de probabilité uniforme  $\mathbb{P}_U$  sur  $([0, 1[, \mathcal{F}_B)$  (ou toute autre manière!), montrer qu'il existe une mesure de probabilité produit  $\mathbb{P}_\Pi$  sur  $(\prod_{i \geq 1} \Omega_i, \mathcal{F}_\Pi)$ .