

---

INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

Série 4

---

**Exercice 1.** Considérons le problème du cours où une personne choisit une pièce parmi les trois types suivants : ou bien les deux côtés de la pièce sont des pile, ou bien les deux côtés sont des face, ou bien la pièce est normale. Supposons ensuite que la personne lance la pièce choisie  $n$  fois, chaque lancer étant indépendant des précédents. Décrire avec soin l'espace probabilisé correspondant à cette situation, et donner les probabilités conditionnelles correspondant à chaque type de pièce sachant le résultat des  $n$  lancers. Que se passe-t-il lorsque  $n \rightarrow \infty$  ?

**Exercice 2.** À la fin du printemps 2020, on utilisait des tests sérologiques pour détecter la présence d'anticorps contre le SARS-CoV-2, et savoir ainsi si la personne était immunisée contre le virus au moment du test ou non. La précision de ces tests était bonne, à savoir de 95%. Ainsi, les faux négatif (le test est négatif alors que la personne a des anticorps) ne concernaient que 5% des tests effectués sur des personnes immunisées, et de même les faux positif (le test est positif alors que la personne n'a pas d'anticorps) ne concernaient que 5% des tests effectués sur des personnes vulnérables. Cependant, malgré ces chiffres, le résultat du test était à interpréter avec soin. Essayons de comprendre pourquoi :

- Vous entendez une personne affirmer que si son test est positif, alors elle a 95% de chances d'avoir des anticorps. Est-ce correct ?
- Considérons maintenant l'information additionnelle suivante : à la fin du printemps 2020, on a estimé qu'environ 5% de la population avait été en contact avec le SARS-CoV-2. Quel espace probabilisé considèreriez-vous maintenant pour calculer la probabilité d'avoir des anticorps sachant qu'on a fait un test positif ? Que vaut cette probabilité ? Que se passe-t-il si vous faites deux tests indépendants le même jour et que les deux sont positifs ?
- Supposons maintenant que 50% de la population ait été en contact avec le SARS-CoV-2. Que devient le résultat précédent ?

**Exercice 3.** [Indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement] Considérons l'espace probabilisé correspondant au lancer de deux pièces équilibrées. Soit  $E_1$  l'évènement : "la première pièce renvoie pile", soit  $E_2$  l'évènement : "la deuxième pièce renvoie pile", et soit  $E_3$  l'évènement : "les deux pièces renvoient la même chose". Montrer que  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

**Exercice 4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, et soient  $E_1, E_2, E_3$  des évènements deux-à-deux indépendants et de probabilité strictement positive. Montrer que si  $E_1$  et  $E_2$  sont conditionnellement indépendants sachant  $E_3$ , alors  $E_1, E_2, E_3$  sont mutuellement indépendants.

**Exercice 5.** Considérons l'espace probabilisé correspondant à un entier aléatoire uniforme dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Soient  $p_1, p_2, \dots, p_k$  des nombres premiers deux-à-deux distincts tels que  $p_i \mid n$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Soit  $E_i$  l'évènement : " $p_i$  divise notre entier aléatoire uniforme". Est-il vrai que les  $E_i$  sont deux-à-deux indépendants ? Sont-ils mutuellement indépendants ? Que se passe-t-il si l'on considère des nombres premiers  $p$  qui ne divisent pas nécessairement  $n$  ?

**Exercice 6.** [Marche aléatoire simple et probabilités conditionnelles] Considérons la marche aléatoire simple de longueur  $n$ .

- Quelle est la probabilité que la marche se termine au point  $n$  au temps  $n$  ? Maintenant, supposons que le premier pas ait été de  $-1$ . Quelle est maintenant la probabilité que la marche se termine au point  $n$  au temps  $n$  ?
- Supposons que  $n$  soit pair. Quelle est la probabilité que la marche se termine au point  $0$  au temps  $n$  ? Maintenant, supposons que le premier pas ait été de  $-1$ . Quelle est maintenant la probabilité que la marche se termine au point  $0$  au temps  $n$  ?

## 0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

**Exercice 7.** [★ maximum d'une marche aléatoire] Soit  $(S_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une marche aléatoire simple, et soit  $M_n = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} S_k$  son maximum. Montrer que pour tout  $h \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbb{P}(M_n \geq h) = 2\mathbb{P}(S_n > h) + \mathbb{P}(S_n = h).$$