INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 3

Exercice 1. [Variables aléatoires sur un espace de probabilité discret] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, i.e. tel que Ω est dénombrable (y compris fini). Montrer que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $X^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{F}$.

Exercice 2. [Encore des dés] Reprenons l'espace de probabilité correspondant au lancer de deux dés à six faces équilibrés distincts, défini dans la série 1.

Definissez la fonction qui correspond à la somme des nombres qui se trouvent sur les faces des dés et montrez que cette fonction est une variable aléatoire.

Maintenant considérons la situation où l'on peut seulement savoir si le résultat de chaque dé est ou bien inférieur ou égal à 3, ou bien strictement supérieur à 3. Est-ce que la somme est toujours une variable aléatoire ? Si non, est-ce que vous avez une idée de quantité numérique qui serait une variable aléatoire et qui approximerait la somme aussi bien qu'on peut ?

Exercice 3. [Egalité presque sûre] Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que $\{X = Y\} := \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = Y(\omega)\}$ est un événement, c'est-à-dire appartient à $\mathcal{F}$.

Exercice 4. [Egalité presque sûre implique égalité en loi] Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose de plus que X et Y sont égales *presque sûrement*, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ (où l'événement $\{X = Y\}$ a été défini à l'exercice précédent).

Montrer qu'alors X et Y sont égales *en loi*, c'est-à-dire que les mesures de probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_B)$ satisfont $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}_Y(E)$ pour tout $E \in \mathcal{F}_B$ (voir Definition 1.18 dans les notes de cours).

Exercice 5. [Vers l'indépendance] On rappelle que deux événements E, F, définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sont dits *indépendants* lorsque $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(F)$.

Montrer que si E et F sont indépendants alors E^c et F le sont également. Que peut-on dire d'un événement E qui soit indépendant de lui-même ?

⋆ Pour le plaisir (non-examinable) ⋆

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que X est une variable aléatoire si et seulement si il existe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ de la forme $X_n = \sum_{k=0}^{N} c_k \mathbb{1}_{\omega \in E_k}$ et telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} X_n(\omega)$.