

---

**INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS**  
**Série 2**

---

**Exercice 1.** Une manière d'étendre la définition d'une somme à des ensembles non dénombrables est la suivante. Étant donné  $\Omega$  un ensemble quelconque et une fonction positive  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , nous définissons la somme  $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$  comme étant égale à  $\sup_{\Omega'} \sum_{\omega \in \Omega'} f(\omega')$  où le sup porte sur tous les sous-ensembles finis  $\Omega' \subseteq \Omega$ .

Montrez que cette somme ne peut être finie que s'il n'y a qu'un nombre au plus dénombrable de  $\omega$  pour lesquels  $f(\omega) > 0$ .

**Exercice 2.** Montrez qu'il n'existe pas de mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$  qui soit invariante par translation, c'est-à-dire telle que pour tout  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on ait  $\mathbb{P}(A + n) = \mathbb{P}(A)$ <sup>1</sup>.

**Exercice 3.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $A_1, A_2, \dots$  des événements.

1. Montrez que  $\Omega \in \mathcal{F}$  et que  $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$ .
2. Montrez que si pour tout  $n \geq 1$ , on a  $A_n \supseteq A_{n+1}$ , alors lorsque  $n \rightarrow \infty$ , il est vrai que  $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq 1} A_k)$ .  
★ Cela est-il valable pour des espaces mesurés généraux ?

**Exercice 4.** Montrez que, dans les axiomes d'un espace de probabilité, l'additivité dénombrable peut être remplacée par l'additivité finie plus l'énoncé suivant : pour toute suite décroissante d'événements  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \dots$  avec  $\bigcap_{i \geq 1} E_i = \emptyset$ , nous avons que  $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n E_i) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

★ Cela est-il valable dans un espace mesuré général ?

**Exercice 5.** [Intersection des  $\sigma$ -algèbres] Soient  $\Omega$  et  $I$  deux ensembles non vides. Supposons que pour chaque  $i \in I$ ,  $\mathcal{F}_i$  soit une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ .

- Montrez que  $\mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  est également une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ .
- Maintenant, soit  $\mathcal{G}$  un sous-ensemble quelconque de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Montrez qu'il existe une  $\sigma$ -algèbre qui contient  $\mathcal{G}$  et qui est incluse dans toute autre  $\sigma$ -algèbre contenant  $\mathcal{G}$ . Celle-ci est appelée la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\mathcal{G}$ .
- Utilisez ceci pour définir une  $\sigma$ -algèbre naturelle sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.** Prouvez que la  $\sigma$ -algèbre de Borel<sup>2</sup> sur  $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ , où  $\tau_E$  est la topologie euclidienne, est aussi la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant tous les pavés de la forme  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ . Pour cela, montrez que tout ensemble ouvert  $U \in \tau_E$  peut être écrit comme une union dénombrable de pavés de la forme ci-dessus.

Index : autour de chaque point rationnel dans  $\mathbb{Q}$ , il existe un intervalle ouvert, et dans un intervalle ouvert, il existe un point rationnel.

---

1. Ici, comme d'habitude,  $A + n = \{a + n : a \in A\}$ .  
2. c'est-à-dire la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant tous les ensembles ouverts d'un espace topologique

## 0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

**Exercice 7.** Soient  $\Omega$  dénombrable et  $\mathcal{F}$  une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ . Montrez qu'on peut trouver des événements disjoints  $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$  tels que pour tout  $E \in \mathcal{F}$ , on ait  $E = \cup_{i \in I_E} E_i$ .

**Exercice 8.** [Connexité des graphes aléatoires uniformes] On s'intéresse au modèle d'un graphe aléatoire uniforme : nous considérons l'ensemble de tous les graphes simples sur  $n$  sommets, chacun ayant une probabilité égale. On dit qu'un graphe est connexe si pour tous deux sommets  $v, w$ , il existe une suite finie de sommets  $v_0 = v, v_1, \dots, v_m = w$  telle qu'il y ait une arête entre chaque  $v_i$  et  $v_{i-1}$ . Montrez que la probabilité que le graphe aléatoire uniforme soit connexe tend vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .