
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 13

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec X_n de loi $\text{Ber}(p_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $p_n \in (0, 1)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si $\sum_{n \geq 1} p_n < \infty$.
3. En déduire que convergence en probabilité n'implique pas nécessairement convergence presque sûre.

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On fixe $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$ avec $l \notin \{i, j, k\}$, et on veut montrer que les variables aléatoires $Y_i Y_j Y_k$ et Y_l sont indépendantes.

1. On fixe a_i, a_j, a_k et a_l des nombres réels. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((Y_i, Y_j, Y_k, Y_l) \in (-\infty, a_i) \times (-\infty, a_j) \times (-\infty, a_k) \times (-\infty, a_l)) \\ = \mathbb{P}((Y_i, Y_j, Y_k) \in (-\infty, a_i) \times (-\infty, a_j) \times (-\infty, a_k)) \cdot \mathbb{P}(Y_l \in (-\infty, a_l)). \end{aligned}$$

En déduire que (Y_i, Y_j, Y_k) et Y_l sont indépendantes.

2. En généralisant l'exercice 2 de la série 11 au cas de vecteurs aléatoires, montrer que $Y_i Y_j Y_k$ et Y_l sont indépendantes.
3. En déduire que si de plus Y_i, Y_j, Y_k, Y_l sont centrées et admettent un moment d'ordre 4, alors $\mathbb{E}[Y_i Y_j Y_k Y_l] = 0$.

Exercice 3. Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité. Supposons que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X . En utilisant le lemme de Borel–Cantelli (ou autre), montrez qu'il existe une sous-suite $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que $(X_{n_k})_{k \geq 1}$ converge presque sûrement vers X .

Exercice 4. [Conditions sur les moments pour la LGN forte et le TCL] Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires de Cauchy standard indépendantes, c'est-à-dire des variables continues de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

1. Les X_i sont-elles intégrables ?
2. Montrez que $\frac{X_1 + X_2}{2}$ a aussi la loi d'une variable de Cauchy standard.
3. Que pouvez-vous dire de $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (vous pouvez prendre la limite le long de $n = 2^k$) ?

Exercice 5. A la suite de problèmes de Santé, Niccolò décide de partager son expérience insoutenable en rédigeant un livre sur l'injustice qu'il a vécue. Toutefois il n'a accès qu'à une machine à écrire, et, du fait de l'obscurité régnant dans le lieu qu'il occupe, il ne peut voir ce qu'il écrit. Ainsi il se voit contraint de taper (uniformément) au hasard sur les différentes touches de la machine à écrire.

En admettant que Niccolò dispose d'un temps infini pour rédiger son chef d'oeuvre, montrer que ce faisant il aura rédigé une infinité de fois le roman "Le Comte de Monte-Cristo".