
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 12

Autour de la définition de l'espérance pour des variables aléatoires positives

L'on a rencontré plusieurs fois au cours des séries d'exercices précédentes la situation, fort fâcheuse au demeurant, où l'on considère l'espérance d'une variable aléatoire **positive** bien que celle-ci ne soit pas nécessairement intégrable. En effet dans ce genre de situation, c'est-à-dire pour une variable aléatoire **positive**, il est d'usage courant de définir l'espérance de celle-ci, bien qu'elle ne soit pas forcément intégrable, en adoptant la convention que $\mathbb{E}[X] = +\infty$ si X n'est pas intégrable.

Cette convention est cohérente avec les définitions du cours de l'espérance :

- Dans le cas de variables aléatoires discrètes, comme X est positive on a $X = |X|$ et donc X intégrable si et seulement si $\sum_{x \in S_X} x\mathbb{P}(X = s) < \infty$, auquel cas $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[|X|] = \sum_{x \in S_X} x\mathbb{P}(X = s)$. D'autre côté si X n'est pas intégrable, cette somme est bien égale à $+\infty$ et donc la convention de $\mathbb{E}(X) = \infty$ est bien justifiée.
- Dans le cas général, on utilise l'approximation de X par X_n vue Section 4.2 des notes de cours pour voir que cette définition est cohérente. En effet puisque $X_n \leq X$ pour tout n , si X n'est pas intégrable $\mathbb{E}[X_n] = +\infty$ pour tout n (avec la convention précédente) et donc on doit avoir $+\infty = \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X]$ qui est donc infini.

Ainsi, si X est une variable aléatoire intégrable, il est toujours possible parler de sa variance en adoptant la convention que celle-ci est égale à $+\infty$ si X^2 n'est pas intégrable.

Exercice 1. [Problème des moments] Soit X une variable aléatoire normale standard. Prouver que $W = \exp(X)$ admet des moments de tout ordre et les calculer. Maintenant, pour $a > 0$ considérons une variable aléatoire discrète Y_a avec support

$$S_a = \{ae^m : m \in \mathbb{Z}\}$$

et définie par

$$\mathbb{P}(Y_a = ae^m) = \frac{1}{Z} a^{-m} e^{-m^2/2} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z},$$

où l'on a posé $Z = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a^{-m} e^{-m^2/2}$ (pourquoi Z est-elle finie?). Montrer que Y_a admet des moments de tout ordre et que de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[W^n] = \mathbb{E}[\exp(Xn)] = \mathbb{E}[Y_a^n]$.

Exercice 2. Considérons la variable aléatoire log-normale, i.e. $Z = \exp(X)$ où X est une gaussienne standard. Prouvez qu'il n'existe aucun intervalle ouvert autour de 0 tel que $M_Z(t)$ existe dans cet intervalle, où l'on rappelle que $M_Z(t) = \mathbb{E}[\exp(tZ)]$.

Exercice 3. Montrez que \bar{X} est un vecteur gaussien de moyenne $\bar{\mu}$ et de covariance C si et seulement si $M_{\bar{X}}(\bar{t}) = \exp(\langle \bar{t}, \bar{\mu} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{t}, C\bar{t} \rangle)$. En déduire que :

- Si X est une gaussienne standard sur \mathbb{R}^n , alors il en est de même pour OX , où O est une matrice orthogonale $n \times n$.
- Le vecteur gaussien de moyenne $\bar{\mu}$ et de covariance C sur \mathbb{R}^n peut être écrit comme $A\bar{Y} + \bar{\mu}$, où \bar{Y} est une gaussienne standard sur \mathbb{R}^n et $C = AA^T$ (vous pouvez supposer qu'une telle matrice A existe, mais vous l'avez vu en algèbre linéaire!).

Exercice 4. Soient $(E_n)_{n \geq 1}$ des événements définis sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prouvez que :

- l'ensemble $\{\omega \in \Omega : \omega \in E_i \text{ pour une infinité de } i\}$ est mesurable et donné par $\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n$;
- l'ensemble $\{\omega \in \Omega : \omega \in E_i \text{ sauf pour un nombre fini de } i\}$ est mesurable donné par $\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} E_n$.

Réexprimez ces événements en utilisant les fonctions indicatrices 1_{E_i} .

Maintenant soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit X est une variable aléatoire également définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que :

- l'ensemble $\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\}$ est mesurable.
- l'ensemble $\{ \omega \in \Omega : X_n(\omega) \text{ converge quand } n \rightarrow \infty \}$ est mesurable.

Exercice 5. Soient E_1, E_2, \dots des événements indépendants de probabilité p_i . Montrez que $\mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} E_i) = 1$ si et seulement si $\prod_{i=1}^n (1 - p_i) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 6. [Borel-Cantelli II]

Soit E_1, E_2, \dots une suite d'événements indépendants définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n) = \infty$. Prouvez que presque sûrement une infinité d'événements E_i se réalisent, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n \right) = 1.$$

Trouvez un contre-exemple dans le cas où les événements ne sont pas indépendants.

0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

Exercice 7. [★ Loi du 0 – 1 de Kolmogorov] Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilités. Supposons que E soit un événement appartenant à la tribu asymptotique σ_∞ . Prouver qu'alors $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$. Ici la tribu asymptotique est définie par $\sigma_\infty := \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$.

Considérons maintenant X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, -1\}$ et définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considérons les sommes $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrez que l'ensemble $E_r := \{ \omega : \text{pour un certain } i \in \mathbb{Z}, S_n(\omega) = i \text{ pour une infinité de } n \}$ est un événement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrez que sa probabilité est soit 0 soit 1. Que se passe-t-il si nous considérons à la place $E_0 := \{ S_n = 0 \text{ pour une infinité de } n \}$?