
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 11

Exercice 1. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi, alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $f(X)$ et $f(Y)$ sont deux variables aléatoires égales en loi.

Exercice 2. Soit X, Y deux variables aléatoires. Montrez que si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont également indépendantes. Pour rappel, on dit qu'une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable lorsque pour tout $B \in \mathcal{F}_B$, on a $h^{-1}(B) \in \mathcal{F}_B$, où \mathcal{F}_B désigne la tribu borélienne sur \mathbb{R} , i.e, la tribu engendrée par les intervalles ouverts.

Exercice 3. Calculez la variance des variables aléatoires suivantes : Binomiale, Poisson et Gamma.

Exercice 4. [Quelques contre-exemples] Trouvez :

- une variable aléatoire intégrable de variance finie avec $\text{Var}(X) < \mathbb{E}(X)$.
- une variable aléatoire intégrable de variance infinie.
- une suite de variables aléatoires X_1, X_2, \dots telle que $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$, mais $\mathbb{P}(X_n \in [-1, 1]) \rightarrow 0$.
- une suite de variables aléatoires X_1, X_2, \dots telle que $\text{Var}(X_n) \rightarrow \infty$, mais $\mathbb{P}(X_n = 0) \rightarrow 1$.

Exercice 5. [Covariance et indépendance] Montrez que si X, Y sont intégrables et de variances finies, alors

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

En déduire que si X, Y sont également indépendantes, alors $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

A l'inverse, trouvez des variables aléatoires X, Y de covariance nulle qui ne sont pas indépendantes. En déduire qu'il existe des variables aléatoires non indépendantes pour lesquelles la variance de leur somme est égale à la somme des variances.

Exercice 6. [Vecteur gaussien] Montrez que pour un vecteur gaussien $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, C)$, la matrice C est la matrice de covariance (i.e. $C_{i,j} = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$) et $\bar{\mu} = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2])$. Montrez que dans ce cas, si $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ alors X_1 et X_2 sont indépendantes. Pouvez-vous donner une condition sur C sous laquelle un vecteur gaussien contiendrait des variables aléatoires mutuellement indépendantes ?