
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 10

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète intégrable avec support S . On suppose également que X^2 est intégrable. Montrez que $c = \mathbb{E}(X)$ minimise l'expression $g(c) := \sum_{x \in S} (x - c)^2 \mathbb{P}(X = x)$.

De plus, montrez à partir de la définition de l'espérance que la valeur de $g(\mathbb{E}(X))$ peut s'écrire $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$. Ceci est appelé la *variance* de X .

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $(X_n)_{n \geq 1}$ les discrétisations

$$X_n = 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k 2^{-n} \mathbf{1}_{X \in [k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n})}.$$

- Démontrez que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_n(\omega) \leq X(\omega) \leq X_n(\omega) + 2^{-n}$ et donc que la suite $(X_n(\omega))_{n \geq 1}$ converge vers $X(\omega)$.
- Ensuite, considérez une variable aléatoire discrète intégrable X avec support S . Montrez que $\mathbb{E}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$, où l'espérance des deux côtés est celle définie pour les variables discrètes, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x).$$

- Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 3. Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires intégrables et positives telles que pour un certain $C > 0$, on a $\mathbb{E}X_i < C$ pour tout $i \geq 1$. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$, la probabilité que $\sum_{i=1}^N X_i \leq N^{1+\epsilon}$ converge vers 1 lorsque $N \rightarrow +\infty$. Que se passe-t-il si on garde l'hypothèse que X_i est intégrable, mais qu'on abandonne l'hypothèse $\mathbb{E}X_i < C$ pour tout $i \geq 1$?

Exercice 4. [Une formule utile] Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives. Montrez que X est intégrable si et seulement si $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X \geq i)$ est finie, et que dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X \geq i)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire intégrable telle que X^2 soit aussi intégrable. Montrez que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]}{t^2}.$$

Trouvez une variable aléatoire (non triviale) X et un t tels que l'égalité soit atteinte.

Exercice 6. En vous ramenant à l'exercice 6 de la série 9, montrez que si X et Y sont deux variables aléatoires intégrables et indépendantes (mais pas forcément discrètes), alors XY est intégrable et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

Exercice 7. [Variable aléatoire continue sans densité] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une famille de v.a. i.i.d. de loi Bernoulli(1/2) sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ quelconque et considérons

$$X : \omega \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2X_n(\omega)}{3^n}.$$

Montrer que X est une variable aléatoire continue, mais n'admettant pas de densité.