

---

**INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS**  
**Série 0**

---

## Espaces des probabilités

**Exercice 1.** Décrire l'espace de probabilité associé aux expériences suivantes :

1. lancer d'une pièce de monnaie équilibrée ;
2. lancer de deux pièces de monnaie équilibrées *indistinguables* ;
3.  $n$  lancers d'une pièce de monnaie truquée :  $P(\text{pile}) = p$ .

## Problèmes de comptage

**Exercice 2.** Dans cet exercice, on considère  $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique (de permutations) sur  $n$  éléments, et on note  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Trouvez des formules pour le cardinal de :

$$\mathfrak{S}_n, \quad \mathcal{C}_k^n = \{A \subset \{1, \dots, n\} : |A| = k\}, \quad \mathcal{V}_k^n = \{(j_1, \dots, j_k) \in [n]^k : i \neq l \implies j_i \neq j_l\}.$$

**Exercice 3.** [Marches aléatoires simples] Un marche aléatoire simple de  $n$  étapes est une suite à valeurs réelles  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$  telle que  $S_0 = 0$  et  $|S_i - S_{i-1}| = 1$ . Combien y a-t-il de parcours différents de longueur  $n$  ? Combien y a-t-il de parcours tels que  $S_n = k$  pour  $k$  un entier quelconque ?

**Exercice 4.** Pour chacun des mots suivants, combien de mots "théoriques" (qui n'ont pas forcément de sens...) pouvez vous écrire en mélangeant les lettres des mots suivants ?

- "patates" ;
- "EPFL" ;
- "minimum".

## Problèmes de décision

**Exercice 5.** [Not so Black Jack]

On joue à la version suivante du black jack : vous pouvez choisir le nombre à obtenir avec la somme de deux cartes, puis vous devez obtenir ce nombre en tirant deux cartes du paquet (on joue avec 52 cartes, trèfle, pique, coeur, carreau, numérotés chacun  $1, 2, \dots, 10, V, D, R^1$ ).

Quel nombre devez vous choisir pour maximiser votre chance de gagner ?

**Exercice 6.** [Bets with knights]

Les probabilités ont commencé à être étudiées avec l'apparition des jeux de hasard. Une des plus vieilles stratégies de pari dont il reste des traces est de Chevalier de Méré<sup>2</sup> qui proposa le pari suivant : il jette quatre dés, si il obtient au moins un 6, vous lui donnez une pièce d'or ; sinon il vous donne une pièce d'or. Acceptez-vous le pari ?

Un second pari proposé est : il jette 24 fois une paire de dés. S'il obtient au moins une fois un double 6, il gagne. Sinon, vous gagnez. Acceptez-vous ce pari ?

---

1. Valet, Dame et Roi valent 10.  
2. Antoine Gombaud de son vrai nom