
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

Série 7

Exercice 1. [Variables discrètes et continues] Soit X une variable aléatoire. Démontrez que :

- X est discrète, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_X est constante par morceaux, si et seulement si il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}_X(S) = 1$.
- X est continue, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_X est continue, si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = y) = \mathbb{P}_X(\{y\}) = 0$.

Exercice 2. [La loi géométrique est sans mémoire] Soit une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. On dit que X est *sans mémoire* si, pour tous $k, \ell \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

Montrer qu'une v.a. géométrique est sans mémoire.

Exercice 3. [Variable binomiale comme nombre d'événements réalisés] Supposons que nous ayons n événements mutuellement indépendants E_1, \dots, E_n de même probabilité p sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considérons X correspondant au nombre de succès/événements réalisés : $X = \sum_{i=1}^n 1_{E_i}$. Montrez que X est une variable aléatoire et suit la loi $Bin(n, p)$.

Déduisez-en que si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi $Ber(p)$ définies sur le même espace de probabilité, alors leur somme suit la loi $Bin(n, p)$.

Exercice 4. [Limite de variables uniformes discrètes] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires discrètes de loi uniforme :

$$X_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} : k = 1, \dots, n \right\}, \quad \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{n}, \quad \forall x \in X_n(\Omega).$$

Montrez que pour tout $a < b \in [0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a < X_n < b) = b - a.$$

Exercice 5. [Une variable aléatoire dans un graphe aléatoire] Pour $p \in (0, 1)$, considérons le modèle de graphe aléatoire d'Erdős-Rényi avec l'ensemble de sommets $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Montrez que le nombre total d'arêtes de ce graphe est une variable aléatoire. Quelle est sa distribution ?

Exercice 6. Rappelez l'espace de probabilité pour une marche aléatoire qui, à chaque étape, monte de 1 avec probabilité p et descend de -1 avec probabilité $1 - p$, et où les incréments à chaque étape sont indépendants.

Notons le point final de la marche à l'étape n par S_n .

- Montrez que chaque étape $S_k - S_{k-1}$ suit la loi d'une variable aléatoire de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre p .
- Prouvez que $\frac{S_n + n}{2}$ suit la loi d'une variable aléatoire binomiale de paramètre p .

0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

Exercice 7. Considérons la marche aléatoire S_n de l'Exercice 6. Que pouvez-vous dire des probabilités des événements suivants, pour un petit ε fixé tel que $0 < \varepsilon < 1/2$, lorsque $n \rightarrow \infty$?

- pour $p = 1/2$, les événements $E_1 = \left\{ \frac{S_n + n}{2} > \frac{n}{2}(1 + \varepsilon) \right\}$ et $E_2 = \left\{ \frac{S_n + n}{2} < \frac{n}{2}(1 - \varepsilon) \right\}$;
- pour $p > 1/2$, l'événement $E = \left\{ \frac{S_n + n}{2} > \frac{n}{2}(1 - \varepsilon) \right\}$.