INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 6

Exercice 1. Soit $\Omega_1 = \Omega_2 = \{0,1\}$. Décrire *explicitement* les ensembles [1] $\mathcal{P}(\Omega_1) \times \mathcal{P}(\Omega_2)$, $\mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $E_\pi \coloneqq \{E_1 \times E_2, \quad E_1 \in \mathcal{P}(\Omega_1), E_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2)\}$ et $\sigma(E_\pi)$ (vu comme une tribu sur $\Omega_1 \times \Omega_2$), et les comparer.

Dans le cas plus général d'un produit de n ensembles dénombrables, est-il vrai d'affirmer que $\mathcal{P}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n) = \sigma\left(\{E_1 \times \cdots \times E_n, \quad E_i \in \mathcal{P}(\Omega_i)\}\right)$?

Bonus non-examinable (et très difficile) : Que se passe-t-il dans le cas d'un produit dénombrable ? Indénombrable ? Ou d'ensembles quelconques ?

Exercice 2. Soient $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, pour $i = 1,2$, des espaces de probabilité discrets, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité produit. Montrer que pour $E_1 \in \mathcal{F}_1$ et $E_2 \in \mathcal{F}_2$, les évènements $\Omega_1 \times E_2$ et $E_1 \times \Omega_2$ sont indépendants.

Généraliser en prouvant que pour un produit fini d'espaces de probabilité discrets, des variables aléatoires X, Y qui dépendent de coordonnées différentes [2] sont indépendantes. En déduire que dans la preuve du Claim 2.24 du cours, les évènements $\{\{\{v,z\} \notin E\} \cap \{\{z,w\} \notin E\}\}_{v,z,w \in V}$ sont bien indépendants.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire. Montrer **soigneusement** que $\mathbb{P}_X(]-\infty, y]) \to 0$ lorsque $y \to -\infty$ et $\mathbb{P}(]-\infty, y]) \to 1$ lorsque $y \to +\infty$. Cela complète la preuve du fait que $F_X : y \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}_X(]\infty, y])$ est une fonction de répartition.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit F sa fonction de répartition. Montrer que quels que soient $x < y \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\mathbb{P}(X < x) = F(x^-)$,
2. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$,
3. $\mathbb{P}(X \in (x,y)) = F(y^-) - F(x)$,
4. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$.

Exercice 5. On dit qu'une variable aléatoire X est discrète à support fini s'il existe un ensemble fini S tel que $\mathbb{P}_X(S) = 1$.

Prouver le Théorème 3.3 des notes de cours dans le cadre des variables aléatoires discrètes à support fini : montrer que toute fonction de répartition constante par morceaux F, possédant un nombre fini de sauts, donne naissance à une unique (en loi) variable aléatoire discrète X_F de support fini et satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}_{X_F}((-\infty, x]) = F(x)$.

Exercice 6. [Paradoxe de Monty-Hall] Après une randonnée d'une heure et demie à cheval en Colombie, Luigi et Niccolò s'arrêtent auprès d'un étal de fruits pour acheter une mangue. Le vendeur, facétieux, les fait choisir parmi trois caisses, l'une contenant ladite mangue, les deux autres contenant chacune un pigeon bien moins succulent. Luigi en désigne une au hasard et le vendeur ouvre une des deux autres caisses de laquelle s'échappe un pigeon. Il leur laisse ensuite la possibilité de changer leur choix pour la caisse restante. Niccolò serait d'avis de changer de caisse, mais Luigi persiste dans son choix initial. Que feriez-vous à leur place ? En quoi la situation vous semble-t-elle tellement incroyable que c'est à peine croyable ?

Résolvez le paradoxe apparent en modélisant la situation avec un espace de probabilité.

1. Pour les plus curieux et les puristes, on rappelle que le couple (a,b) est défini, selon l'acceptation la plus commune (dite au sens de Kuratowski), comme $\{\{a\},\{a,b\}\}$. Une autre définition, due à Wiener, est de voir (a,b) comme $\{\{\{x\},\emptyset\},\{\{y\}\}\}$. Quant au produit cartésien P de deux ensembles A et B, il s'agit de l'ensemble dont les éléments sont tous les couples (au sens de Kuratowski ou de Wiener selon vos préférences) dont la première composante appartient à A et la seconde à B.

2. C'est-à-dire, pour $\Omega \coloneqq \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, s'il existe $I_X, I_Y \subset \{1, \ldots, n\}$ disjoints tels que $X(\omega) = X(\omega')$ (resp. $Y(\omega) = Y(\omega')$) si $\omega_{I_X} = \omega'_{I_X}$ (resp. $\omega_{I_Y} = \omega'_{I_Y}$).

0.1 $\star$ Pour le plaisir (non-examinable) $\star$

Exercice 7. Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une collection d'espaces topologiques à base dénombrable. Pour chaque $i \in I$, on note $\mathcal{F}_i$ la tribu borélienne sur X_i (la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts $\mathcal{T}_i$). Montrer que la tribu borélienne sur $\left(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_\Pi\right)$ (la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts pour la topologie produit) coïncide avec la tribu produit $\mathcal{F}_\Pi$ sur $\prod_{i\in I} X_i$.