

**Last name :** .....

**First name :** .....

**Sciper number :** .....

- La durée de l'examen est de **trois heures**.
- Veuillez écrire **votre nom et votre numéro sciper** sur cette feuille.
- Cerveau et stylo uniquement – aucun matériel ou appareil de soutien n'est autorisé, aucune discussion n'est permise.
- Stylo noir ou bleu uniquement, pas d'écriture en couleur, pas de crayon, s'il vous plaît !
- Veuillez écrire vos solutions uniquement sur le **papier blanc**. Si vous avez besoin d'espace supplémentaire, des pages numérotées sont disponibles à la fin du livret. Si vous avez encore besoin de plus de papier, demandez aux surveillants.
- Seuls les papiers blancs agrafés à votre livret seront corrigés. Les papiers colorés en vrac sont pour votre brouillon et ne seront pas corrigés.
- Les quatre questions sont **indépendantes** et ont **environ le même poids total**. De plus, les trois parties de chaque question sont notées indépendamment.
- Vous pouvez citer tout résultat de base du cours (notes + exercices) sans preuve, sauf si l'on vous demande de le démontrer.
- Veuillez ne pas retirer l'agrafe.

<b>Q. 1</b>	<b>Q. 2</b>	<b>Q. 3</b>	<b>Q. 4</b>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<b>Total</b>		<b>Note</b>	
<input type="text"/>		<input type="text"/>	

*Bonne chance !*

### Question 1

- i Donnez la définition d'un espace probabilisé en définissant correctement tous ses composants et en listant les hypothèses pertinentes. Quelle est la plus petite  $\sigma$ -algèbre que l'on peut avoir sur un espace probabilisé ? Quelle est la plus grande ?
- ii Construisez un espace probabilisé et les événements/variables aléatoires pertinents pour étudier la question suivante. L'examen se compose de  $n$  questions à choix binaire (oui ou non). Supposez que l'étudiant a une connaissance  $\epsilon$ , ce qui signifie que pour chacune des questions, l'étudiant peut deviner la bonne réponse avec une probabilité  $1/2 + \epsilon$ . On suppose que les réponses aux questions n'ont pas d'influence les unes sur les autres et nous nous intéressons à la question de savoir si l'étudiant réussit, ce qui peut signifier, selon le pays, que l'étudiant atteint strictement plus de 50% ou plus de 60% de bonnes réponses.
- iii Montrez que pour tout  $\epsilon > 0$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la probabilité que l'étudiant réussisse tend vers 1 si le seuil est exactement de 50%. Qu'en est-il du cas où le seuil est de 60% ?

### Question 1

- i Give the definition of a probability space, defining properly all its components and listing the relevant assumptions. What is the smallest  $\sigma$ -algebra that one can have on a probability space? What is the largest?
- ii Construct a probability space and the relevant events/random variables to study the following question. The exam consists of  $n$  yes and no questions. Suppose the student has  $\epsilon$  knowledge, meaning that for each of the questions the student can guess the correct answer with probability  $1/2 + \epsilon$ . We assume that the answers to different questions do not influence each other and we are interested in the question whether the student passes, which can mean depending on the country whether the student achieves more than 50% or more than 60% of correct answers.
- iii Show that for any  $\epsilon > 0$ , as  $n \rightarrow \infty$  the probability that the student passes goes to 1 if the threshold is exactly 50%. What about the case where the threshold is 60%?







## Question 2

- i Donnez deux critères de l'indépendance de deux variables aléatoires. Donnez une définition de l'indépendance mutuelle de  $n$  variables aléatoires.
- ii Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , définies par  $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Calculez  $\mathbb{P}(X = Y)$ .
- iii Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace de probabilité. Démontrez que  $X, Y$  sont indépendantes si et seulement si, pour toutes fonctions continues  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(X), g(Y)$  sont indépendantes.
- iv Pour tout  $n \geq 4$ , trouvez un espace de probabilité avec  $n$  variables aléatoires définies dessus, tel que chaque  $(n - 1)$ -uplet soit mutuellement indépendant, mais que toutes les  $n$  ne soient pas mutuellement indépendantes.

## Question 2

- i Give two criteria for independence of two random variables. Give a definition of mutual independence of  $n$  random variables.
- ii Let  $X$  and  $Y$  be two independent identically distributed discrete random variables defined by  $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n}$  for each  $n \geq 1$ . Calculate  $\mathbb{P}(X = Y)$ .
- iii Let  $X, Y$  be two discrete random variables defined on the same probability space. Prove that  $X, Y$  are independent if and only if for all continuous functions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(X), g(Y)$  are independent.
- iv For every  $n \geq 4$ , find a probability space with  $n$  random variables defined on it such that each  $n - 1$ -tuple of them is mutually independent, but all  $n$  are not mutually independent.







### Question 3

- i Donnez la définition d'une variable aléatoire discrète intégrable et de son espérance. Comment définit-on l'espérance d'une variable aléatoire générale ? (Vous pouvez utiliser sans les prouver les lemmes pertinents).
- ii Considérez une variable aléatoire  $X$  dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -1, \\ \frac{1}{3} & \text{pour } -1 \leq t < 2, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } 2 \leq t < 3, \\ 1 & \text{pour } t \geq 3. \end{cases}$$

Montrez qu'elle est de carré intégrable et calculez son espérance et sa variance.

- iii Démontrez que si  $X, Y$  sont discrètes et intégrables, alors  $X + Y$  l'est également et que  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .
- iv Existe-t-il une variable aléatoire positive  $X$  telle que  $\mathbb{E}(X^m) = m$  pour tout  $m \geq 1$  ?

### Question 3

- i Give the definition of an integrable discrete random variable and its expectation. How does one define the expectation of a general random variable? (You may assume the relevant lemmas).
- ii Consider a random variable  $X$  whose cumulative distribution function is given by

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < -1, \\ \frac{1}{3} & \text{for } -1 \leq t < 2, \\ \frac{1}{2} & \text{for } 2 \leq t < 3, \\ 1 & \text{for } t \geq 3. \end{cases}$$

Show that it is square-integrable and calculate its expectation and variance.

- iii Prove that if  $X, Y$  are discrete and integrable, then so is  $X + Y$  and that  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .
- iv Does there exist a non-negative random variable  $X$  such that  $\mathbb{E}(X^m) = m$  for every  $m \geq 1$ ?







#### Question 4

- i Décrivez la loi d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Calculez sa fonction génératrice des moments et trouvez la loi de  $X + Y$  où  $X, Y$  sont deux variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre  $\lambda$ .
- ii Énoncez les deux lemmes de Borel-Cantelli et démontrez-en un.
- iii Supposons que nous ayons des variables aléatoires de Poisson i.i.d.  $X_1, X_2, \dots$  de paramètre 1 sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Montrez qu'il existe presque sûrement seulement un nombre fini de  $n$  tel que  $X_n = n$ . Expliquez comment définir une variable aléatoire  $N$  représentant le nombre d'indices  $n$  tels que  $X_n = n$ .  $N$  est-elle intégrable ? Si oui, quelle est son espérance ? Que change-t-il si les variables ne sont pas de type Poisson mais simplement discrètes avec des valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ?

#### Question 4

- i Describe the law of a Poisson random variable of parameter  $\lambda > 0$ . Calculate its moment generating function and find the law of  $X + Y$  where  $X, Y$  are two independent Poisson random variables of parameter  $\lambda$ .
- ii State the two Borel-Cantelli lemmas and prove one of them.
- iii Now suppose that we have i.i.d. Poisson random variables  $X_1, X_2, \dots$  of parameter 1 on a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Show that almost surely there are only finitely many  $n$  such that  $X_n = n$  holds. Explain how to define a random variable  $N$  representing the number of indexes  $n$  with  $X_n = n$ . Is  $N$  integrable? If yes, what is its expected value? What changes if the variables are no longer Poissonian, but just discrete with values in  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ?







(Supplementary page 1)

(Supplementary page 2)

(Supplementary page 3)