INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 2

Exercice 1. Une manière d'étendre la définition d'une somme à des ensembles non dénombrables est la suivante. Étant donnés Ω un ensemble quelconque et une fonction positive $f : \Omega \to [0,1]$, nous définissons la somme $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)$ comme étant égale à $\sup_{\Omega'} \sum_{\omega\in\Omega'} f(\omega')$ où le sup porte sur tous les sous-ensembles finis $\Omega' \subseteq \Omega$.

Montrez que cette somme ne peut être finie que s'il n'y a qu'un nombre au plus dénombrable de ω pour lesquels $f(\omega) > 0$.

Solution. Supposons que le sup est fini, et notons le S. Pour n un entier strictement positif, on pose $A_n := \left\{\omega \in \Omega, f(\omega) > \frac{1}{n}\right\}$. Les ensembles A_n sont finis. En effet, pour chaque sous-ensemble fini A de A_n, on a

$$\#A \cdot \frac{1}{n} = \sum_{\omega\in A} \frac{1}{n} \leq \sum_{\omega\in A} f(\omega) \leq S,$$

d'où $\#A \leq S\cdot n$. Cela implique que $\#A_n \leq S \cdot n$ (car si $\#A_n > S\cdot n$, alors on peut trouver un sous-ensemble fini A de A_n tel que $\#A > S \cdot n$). Par conséquent $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est dénombrable. Or $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \{\omega \in \Omega, \quad f(\omega) > 0\}$. Donc il n'y a effectivement qu'un nombre au plus dénombrable de ω pour lesquels $f(\omega) > 0$.

Exercice 2. Montrez qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit invariante par translation, c'est-à-dire telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on ait $\mathbb{P}(A + n) = \mathbb{P}(A)$ [1].

Solution. Par invariance par translation, $\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{0\})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par additivité dénombrable,

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\{0\}),$$

ce qui est soit égal à 0 si $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$, soit égal à ∞ si $\mathbb{P}(\{0\}) > 0$, ce qui donne une contradiction.

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, A_2, \ldots$ des événements.

1. Montrez que $\Omega \in \mathcal{F}$ et que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$.
2. Montrez que si pour tout $n \geq 1$, on a $A_n \supseteq A_{n+1}$, alors lorsque $n \to \infty$, il est vrai que $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq 1} A_k)$.
   $\star$ Cela est-il valable pour des espaces mesurés généraux ?

Solution. Pour le premier point on utilise que $\emptyset \in \mathcal{F}$ et que par stabilité de $\mathcal{F}$ sous passage au complémentaire $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{F}$. De même on a que $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c = (A_1^c \cup A_2)^c$. Comme $A_1^c \in \mathcal{F}$ et $A_2 \in \mathcal{F}$ $A_1^c \cup A_2 \in \mathcal{F}$ et dond $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$. Pour le second point, on pose $B_n := A_n^c$: dans ce cas on a $B_{n+1} \supseteq B_n$ et on veut montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq 1} B_k)$. Pour cela on utilise le même raisonnement que dans l'exercice 5 de la semaine dernière en posant $C_{n+1} = B_{n+1} \setminus B_n$ pour $n \geq 1$. On a alors que les C_k sont disjoints, $\bigcup_{k\geq=1}^N C_k = B_N$ et $\bigcup_{k\geq 1} C_k = \bigcup_{j\geq 1} B_k$. Par conséquent on a que $\sum_{k\geq 1}^n \mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(B_n)$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} B_k\right)$ ce qui nous permet de conclure en prenant $n \to \infty$.

$\star$ Non : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré général, il faut rajouter l'hypothèse $\mu(A_n) < \infty$ pour n assez grand.

1. Ici, comme d'habitude, $A + n = \{a + n : a \in A\}$.

Exercice 4. Montrez que, dans les axiomes d'un espace de probabilité, l'additivité dénombrable peut être remplacée par l'additivité finie plus l'énoncé suivant : pour toute suite décroissante d'événements $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \ldots$ avec $\cap_{i\geq 1} E_i = \emptyset$, nous avons que $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n E_i) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
$\star$ Cela est-il valable dans un espace mesuré général ?

Solution. L'exercice précédent montre que la définition d'espace probabilisé implique l'énoncé voulu. Dans l'autre sens, donnons-nous $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjoints et montrons que $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$, où $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Pour cela, fixons un grand entier $N \in \mathbb{N}^*$, et décomposons $A = B_N \cup C_N$, avec $B_N = A_1 \cup \ldots \cup A_N$ et $C_N = A_{N+1} \cup A_{N+2} \cup \ldots$. En utilisant deux fois l'additivité finie, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_N) + \mathbb{P}(C_N) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_N).$$

Lorsque $N \to \infty$, on a $\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n) \to \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$, et pour conclure il suffit de justifier que $\mathbb{P}(C_N) \to 0$. C'est là qu'on utilise l'énoncé supplémentaire : les C_N sont décroissants, et d'intersection vide puisque les A_n sont disjoints.

Exercice 5. [Intersection des σ-algèbres] Soient Ω et I deux ensembles non vides. Supposons que pour chaque $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ soit une σ-algèbre sur Ω.

- Montrez que $\mathcal{F} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est également une σ-algèbre sur Ω.
- Maintenant, soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrez qu'il existe une σ-algèbre qui contient $\mathcal{G}$ et qui est incluse dans toute autre σ-algèbre contenant $\mathcal{G}$. Celle-ci est appelée la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{G}$.
- Utilisez ceci pour définir une σ-algèbre naturelle sur $[0, 1]$.

Solution. Pour le premier point il s'agit de vérifier que $\mathcal{F}$ satisfait aux axiomes des σ-algèbres. Tout d'abord $\emptyset \in \mathcal{F}_i$ pour tout i dont $\emptyset \in \cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A \in \mathcal{F}_i$ pour tout i et donc $A^c \in \mathcal{F}_i$ pour tout i. Il s'ensuit que $A^c \in \mathcal{F}$. Enfin si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ alors $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_i$ pour tout i, donc $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_i$ puis $A_1, A_2 \in \cap_{i\in I}\mathcal{F}$.

Pour le second point on peut poser $\mathcal{F} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ où $\{\mathcal{F}_i, i \in I\}$ est l'ensemble des σ-algèbres qui contiennent $\mathcal{G}$ (non-vide puisque contient $\mathcal{P}(\Omega)$). Par le point précédent il s'agit d'une σ-algèbre, qui vérifie les hypothèses requises.

Pour le dernier point on peut considérer le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{P}([0, 1])$ qui est donné par l'ensemble de tous les intervalles de la forme (a, b) avec $0 \leq a < b \leq 1$. Alors par le point précédent on peut construire une σ-algèbre sur $[0, 1]$ qui contient $\mathcal{G}$ et qui soit minimale pour l'inclusion. Il s'agit de la *tribu Borélienne* sur $[0, 1]$.

Exercice 6. Prouvez que la σ-algèbre de Borel[2] sur $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$, où τ_E est la topologie euclidienne, est aussi la plus petite σ-algèbre contenant tous les pavés de la forme $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Pour cela, montrez que tout ensemble ouvert $U \in \tau_E$ peut être écrit comme une union dénombrable de pavés de la forme ci-dessus.

Indice : autour de chaque point rationnel dans U, considérez un pavé qui tient tout juste dans U.

Solution. We recall that the Borel σ-algebra on $\mathbb{R}^n$, denoted by $\mathcal{B} = \sigma(\tau_E)$, is the smallest σ-algebra containing all open sets of $\mathbb{R}^n$ (with respect to the Euclidean topology). We have to show that

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{C}), \tag{1}$$

where $\mathcal{I}$ is the collection of open boxes $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, and $\mathcal{C}$ is the collection of sets of the form $(-\infty, a_1] \times \ldots \times (-\infty, a_n]$. We show the first equality. Since elements of $\mathcal{I}$ are open sets, it is clear that $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}$. For the reverse inclusion, we will need the following claim.

Claim : Any open subset of $\mathbb{R}^n$ *is a countable union of open boxes.*

2. c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre contenant tous les ensembles ouverts d'un espace topologique

Proof of the claim. Let first $U \subset \mathbb{R}^n$ be an open proper (i.e. $\neq \mathbb{R}^n$) subset of $\mathbb{R}^n$. For every $q \in U \cap \mathbb{Q}^n$, we set $d(q) := \sup\{d : (q_1 - d, q_1 + d) \times \cdots \times (q_n - d, q_n + d) \subseteq U\}$. Note that $d(q) < \infty$ by the latter assumption on U. We now show that

$$U = \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}^n} (q_1 - d(q), q_1 + d(q)) \times \cdots \times (q_n - d(q), q_n + d(q))\,. \tag{2}$$

Observe that this union is at most countable and that by construction the right-hand side is contained in U. As for the reverse inclusion, observe that

$$U \cap \mathbb{Q}^n \subseteq \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}^n} (q_1 - d(q), q_1 + d(q)) \times \cdots \times (q_n - d(q), q_n + d(q))$$

by construction. Fix therefore a $u \in U \setminus \mathbb{Q}^n$. By openness of U there exists $r > 0$ such that $(u_1 - r, u_1 + r) \times \cdots \times (u_n - r, u_n + r) \subseteq U$ and by density there exists $q \in \mathbb{Q}^n$ such that $q \in (u_1 - r, u_1 + r) \times \cdots \times (u_n - r, u_n + r)$ and such that q lies at a distance smaller than $r/2$ from u. Then by definition of $d(q)$ and the latter condition on the choice of q, we get that $u \in (q_1 - d(q), q_1 + d(q)) \times \cdots \times (q_n - d(q), q_n + d(q))$.

Note that $U = \mathbb{R}^n$ can be written as $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-k, k)^n$.

□

By the previous claim, we can write every open set $U \subseteq \mathbb{R}^n$ as countable union of boxes and since $\sigma(\mathcal{I})$ is stable under countable unions, $U \in \sigma(\mathcal{I})$. Since $\mathcal{B}$ is the smallest σ-algebra containing all open sets of $\mathbb{R}^n$, we conclude that $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{I})$.

0.1 ⋆ Pour le plaisir (non-examinable) ⋆

Exercice 7. Soient Ω dénombrable et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur Ω. Montrez qu'on peut trouver des événements disjoints $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $E \in \mathcal{F}$, on ait $E = \cup_{i \in I_E} E_i$.

Solution. We define the relation $\sim$ over Ω by $x \sim y$ if and only if x and y belong to the same "elementary block" : that is $x \sim y$ if and only if there exists $A \in \mathcal{F}$ such that $x, y \in A$, and for any subset $B \subset A$ belonging to $\mathcal{F}$, we must have $B = A$. Then $\sim$ is an equivalence relation, and equivalence classes for $\sim$ are elements of $\mathcal{F}$. Now since the canonical surjection from Ω to the set $\mathcal{C}$ of equivalence classes for $\sim$ is surjective, Ω being countable implies that $\mathcal{R}$ is countable too.

Denote by $[x]$ the equivalence class in Ω corresponding to the element $x \in \Omega$, that is :

$$[x] = \{y \in \Omega \mid \exists E_{xy} \in \mathcal{F} \text{ s.t. } x, y \in E_{xy} \text{ and } \forall E' \subset E_{xy} \text{ with } E' \in \mathcal{F},\ E' = E_{xy}\}.$$

Let now $E \in \mathcal{F}$ and consider the set of all the equivalence classes *generated* by elements in E :

$$\mathcal{S}_E := \{[x] \mid x \in E\}.$$

Since Ω is countable, $\mathcal{S}_E$ must be countable, and we can write :

$$\mathcal{S}_E = \{[x_1], [x_2], [x_3], \dots\}$$

for certain x_is in E, $i \geq 1$, with $[x_i] \neq [x_j]$ for $i \neq j$. Note that since they are equivalence classes, for $i \neq j$ we also have $[x_i] \cap [x_j] = \emptyset$. Finally, we observe that :

$$\cup_{i \geq 1} [x_i] = E$$

This can be proven by double inclusion :

* $\supset$. This is clear since, by construction, $\mathcal{S}_E$ contains all the equivalence classes generated by elements of E. Thus, if we pick $x \in E$, there must exist $i \geq 1$ s.t. $[x_i] = [x]$, and thus x belongs to the union.
* $\subset$. Let $x \in \cup_{i \geq 1} [x_i]$. Then, there exists $j \geq 1$ s.t. $x \in [x_j]$, with $x_j \in E$. This means that there exists $E_j \in \mathcal{F}$ s.t. $x, x_j \in E_j$.
  Suppose now $x \notin E$. Then $x \in E^c$, which is in $\mathcal{F}$ since $\mathcal{F}$ is a σ-algebra. We then have $x \in E^c \cap E_j$. But $E^c \cap E_j \in \mathcal{F}$ and is at the same time a subset of E_j. Thus, by the equivalence relation, we have $E^c \cap E_j = E_j$, which implies $E_j \subset E^c$. But this means $x_j \in E^c$, which is a contradiction. Therefore $x \in E$ and we are done.

Exercice 8. [Connexité des graphes aléatoires uniformes] On s'intéresse au modèle d'un graphe aléatoire uniforme : nous considérons l'ensemble de tous les graphes simples sur n sommets, chacun ayant une probabilité égale. On dit qu'un graphe est connexe si pour tous deux sommets v, w, il existe une suite finie de sommets $v_0 = v, v_1, \ldots, v_m = w$ telle qu'il y ait une arête entre chaque v_i et v_{i-1}. Montrez que la probabilité que le graphe aléatoire uniforme soit connexe tend vers 1 lorsque $n \to \infty$.

Solution. Il s'agit de montrer que lorsque $n \to \infty$, on a

$$\frac{\#\{\text{graphes simples non connexes sur } n \text{ sommets}\}}{\#\{\text{graphes simples sur } n \text{ sommets}\}} \longrightarrow 0.$$

D'une part, le nombre de graphes simples sur n sommets est $2^{\binom{n}{2}}$ (pour chaque paire de sommets, on choisit si l'arête est présente ou non, et il y a $\binom{n}{2}$ paires de sommets).

D'autre part, on peut se contenter d'une majoration brutale du nombre de graphes non connexes. Remarquons que chaque graphe G (simple sur n sommets) non connexe peut être séparé en deux sous-graphes disjoints G_1 et G_2 qui ne communiquent pas (i.e, il n'y a pas d'arête entre un sommet de G_1 et un sommet de G_2), avec disons $\#G_1 \geq \#G_2 \geq 1$ (en particulier, on a $n/2 \leq \#G_1 \leq n-1$). On en tire la majoration (le facteur $\binom{n}{k}$ prend en compte le nombre de possibilités pour G_1 sous-graphe de G)

$$\begin{aligned}
&\#\{\text{graphes simples non connexes sur } n \text{ sommets}\}\\
&\leq \sum_{n/2 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} \cdot \#\{\text{graphes simples sur } k \text{ sommets}\} \cdot \#\{\text{graphes simples sur } n-k \text{ sommets}\}\\
&= \sum_{n/2 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-k}{2}}.
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned}
\frac{\#\{\text{graphes simples non connexes sur } n \text{ sommets}\}}{\#\{\text{graphes simples sur } n \text{ sommets}\}} &\leq \sum_{n/2 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}-\binom{n}{2}}\\
&= \sum_{n/2 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} \cdot 2^{-k(n-k)},
\end{aligned}$$

et il reste à vérifier que cette dernière expression tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Pour cela, on se donne un paramètre $\alpha \in]1/2, 1[$ à ajuster, et on contrôle d'une part la somme S_1 pour $n/2 \leq k \leq \alpha n$, et d'autre part la somme S_2 pour $\alpha n \leq k \leq n-1$. Dans la première somme, on peut minorer $k(n-k) \geq n/2 \cdot (1-\alpha)n$, ce qui donne

$$S_1 \leq \sum_{n/2 \leq k \leq \alpha n} \binom{n}{k} \cdot 2^{-(1-\alpha)/2 \cdot n^2} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{-(1-\alpha)/2 \cdot n^2} = 2^n \cdot 2^{-(1-\alpha)/2 \cdot n^2} = 2^{n-(1-\alpha)/2 \cdot n^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour la deuxième somme, on minore simplement $k(n-k) \geq \alpha n$, et on utilise la monotonie des coefficients binomiaux pour écrire

$$S_2 \leq \sum_{\alpha n \leq k \leq n-1} \binom{n}{\lceil \alpha n \rceil} \cdot 2^{-\alpha n} \leq n \cdot \binom{n}{\lceil \alpha n \rceil} \cdot 2^{-\alpha n} =: \phi_\alpha(n).$$

Il reste à ajuster α pour s'assurer que $\phi_\alpha(n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Il suffit de vérifier que son logarithme,

$$\ln \phi_\alpha(n) = \ln n + \ln(n!) - \ln(\lceil \alpha n \rceil !) - \ln((n - \lceil \alpha n \rceil)!) - \alpha n \ln 2,$$

tend vers moins l'infini lorsque $n \to \infty$. Pour cela, on va utiliser la formule de Stirling, sous la forme :

$$\ln(n!) = n \ln n - n + o(n) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Comme $\lceil \alpha n \rceil$ tend vers l'infini lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(\lceil \alpha n \rceil !) &= \lceil \alpha n \rceil \ln \lceil \alpha n \rceil - \lceil \alpha n \rceil + o(\lceil \alpha n \rceil) \\
&= (\alpha n + O(1)) \ln(\alpha n + O(1)) - \alpha n + o(n) \\
&= (\alpha n + O(1))(\ln(\alpha n) + o(1)) - \alpha n + o(n) \\
&= (\alpha n + O(1))(\ln n + \ln \alpha + o(1)) - \alpha n + o(n) \\
&= \alpha n \ln n + \alpha \ln(\alpha) \cdot n - \alpha n + o(n)
\end{aligned}$$

De même, comme $n - \lceil \alpha n \rceil$ tend vers l'infini lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\ln(n - \lceil \alpha n \rceil !) = (1-\alpha) n \ln n + (1-\alpha) \ln(1-\alpha) \cdot n - (1-\alpha) n + o(n)$$

On trouve donc après simplification que lorsque $n \to \infty$,

$$\ln \phi_\alpha(n) = -(\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha \ln 2) \cdot n + o(n).$$

Pour s'assurer que $\ln \phi_\alpha(n) \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$, on choisit donc α assez proche de 1 pour que

$$\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha \ln 2 > 0.$$

C'est possible car cette expression tend vers $\ln 2 > 0$ lorsque $\alpha \to 1^-$.