

## Série 9 MATH-220

le 17 novembre 2025

Les exercices marqués avec (★) sont facultatifs.

### Exercice 1

Dans la preuve du théorème de Tychonoff dans le cas général, on a utilisé l'axiome du choix plusieurs fois. On va montrer maintenant que c'est en fait inévitable.

En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer qu'un produit  $\prod_{i \in I} X_i$  d'une famille d'ensembles non-vides  $(X_i)_{i \in I}$  est non-vide (i.e., l'**axiome du choix** doit être vrai).

*Indication: Munir chaque  $X_i$  de la topologie grossière, considérer le produit des  $Y_i := X_i \coprod \{*\}$ , et utiliser la PIF pour  $\{A_i := \text{pr}_i^{-1}(X_i)\}_{i \in I}$ .*

### Exercice 2

Pour illustrer le sens du lemme du tube, considérer

- $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ ,
- $(X', \mathcal{T}') = ([-5, 5], \mathcal{T}_{\text{st}}|_{[-5, 5]})$ ,
- $W = \{(x, y) : xy < 1\} \subseteq X \times X'$ , et
- $x_0 = 0$ .

Trouver un ouvert  $U \subseteq X$  tel que  $U \times X' \subseteq W$ .

Que se passe-t-il si  $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ ?

### Exercice 3

Montrer que le cube de Hilbert  $X = \prod_{\mathbb{N}} [0, 1]$  muni de la topologie produit (où chaque intervalle  $[0, 1]$  est muni de la topologie de sous-espace induite de la topologie standard sur  $\mathbb{R}$ ) est homéomorphe à l'espace métrique  $X' = \prod_{\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$  muni de la topologie induite par la distance

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)^2} \quad \forall x, y \in X'.$$

### Exercice 4

En utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout espace vectoriel possède une base.

### (★) Exercice 5

L'ensemble de Cantor est le sous-ensemble de  $[0, 1]$  constitué des nombres admettant un développement en base 3 ne contenant que les chiffres 0 et 2. Autrement dit, l'ensemble de Cantor est l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i} : (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Soit  $X = \prod_{\mathbb{N}} \{0, 1\}$ , muni de la topologie produit, où  $\{0, 1\}$  est muni de la topologie discrète. Montrer que  $X$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor, muni de la topologie de sous-espace (par rapport à la topologie standard sur  $[0, 1]$ ).

### (★) Exercice 6

Rappeler la définition de la métrique de Hausdorff de la série 1. Soit  $(M, d)$  un espace métrique, et soit

$$X = \{Y \mid Y \subseteq M, Y \text{ fini}, Y \neq \emptyset\}.$$

On munit  $X$  de la topologie  $\mathcal{T}_H$  induite par la métrique de Hausdorff.

1. Quelles sont les espaces métriques  $(M, d)$  pour lesquels  $(X, \mathcal{T}_H)$  est compact ?
2. Montrer que l'application  $M \rightarrow X$  définie par  $x \mapsto \{x\}$  est une isométrie sur son image.
3. (★★) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit

$$X_n = \{Y \mid Y \subseteq M, |Y| \leq n, Y \neq \emptyset\}.$$

Quelles sont les espaces métriques  $(M, d)$  pour lesquels  $X_n$ , muni de la topologie de sous-espace par rapport à  $X$ , est compact ?

*Indice : Considérer une application appropriée  $M^n \rightarrow X$ .*