

Série 8 MATH-220

le 10 novembre 2025

L'exercice 3 peut être rendu pour correction le lundi 17 novembre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec (★) sont facultatifs.

Exercice 1

Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.

1. Montrer que, pour toute famille $(Y_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles $Y_i \subseteq X_i$, on a que

$$\overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$$

où l'adhérence à gauche est calculée par rapport à la topologie produit.

2. Montrer que, pour toute famille $(Y_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles $Y_i \subseteq X_i$, on a que

$$\ast_{i \in I} (\mathcal{T}_i|_{Y_i}) = (\ast_{i \in I} \mathcal{T}_i)|_{\prod_{i \in I} Y_i}.$$

3. Soient I un ensemble et $\{\phi_i: (X_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{\cong} (X'_i, \mathcal{T}'_i)\}_{i \in I}$ une famille d'homéomorphismes. Montrer que $(\prod_{i \in I} X_i, \ast_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ et $(\prod_{i \in I} X'_i, \ast_{i \in I} \mathcal{T}'_i)$ sont homéomorphes.
4. (★) Trouver un exemple d'un produit non dénombrable d'espaces métrisables qui n'est pas métrisable. Est-ce qu'un produit non dénombrable d'espaces métrisables peut être métrisable?

Definition 0.1. On définit sur $\prod_{i \in I} X_i$ deux nouvelles topologies:

- la **topologie boîte**, qui est engendrée par la sous-base

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i \right\};$$

- lorsque tout (X_i, \mathcal{T}_i) est métrisé par d_i , la **topologie uniforme**, qui est induite par la métrique $\bar{\rho}: \prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \mathbb{R}$, où

$$\bar{\rho}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) := \min \{1, \sup \{d_i(x_i, y_i) \mid i \in I\}\}.$$

Exercice 2

1. Montrer que sur $\prod_{i \in I} X_i$ la topologie boîte est plus fine que la topologie produit. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que, si tout X_i est un espace métrique, alors la topologie boîte sur $\prod_{i \in I} X_i$ est plus fine que la topologie uniforme, qui est plus fine que la topologie produit. Donner un exemple où les inclusions sont strictes.

Definition 0.2. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique (X, \mathcal{T}) converge vers un point x par rapport à \mathcal{T} si pour tout $U \in \mathcal{T}$ qui contient x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, l'on a que $x_n \in U$.

Exercice 3

Soit $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans le produit $\prod_{i \in I} X_i$.

1. Montrer que $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point \mathbf{x} par rapport à la topologie produit si et seulement si la suite $(\text{pr}_i(\mathbf{x}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\text{pr}_i(\mathbf{x})$ pour tout $i \in I$.
2. Est-ce que c'est aussi vrai si on munit $\prod_{i \in I} X_i$ de la topologie boîte?
3. Si, pour tout $i \in I$, on pose $X_i = X$, où X est un espace métrique, alors $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\prod_{i \in I} X$ par rapport à la métrique uniforme si et seulement si la suite de fonctions $(\mathbf{x}_n : I \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément au sens de l'analyse. Ensuite, si I est muni d'une topologie et toute $\mathbf{x}_n : I \rightarrow X$ est continue, alors la limite l'est aussi.

Definition 0.3. Soient $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ et $f'' : (X'', \mathcal{T}'') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ deux applications continues. Le **produit fibré** de f' et f'' est

$$X' \times_X X'' := \{(x', x'') \in X' \times X'' \mid f'(x') = f''(x'')\},$$

muni de la topologie de sous-espace de $(X' \times X'', \mathcal{T}' \star \mathcal{T}'')$. Noter que les restrictions des projections définissent des applications continues

$$\text{pr}_1 : (X' \times_X X'', (\mathcal{T}' \star \mathcal{T}'')_{X' \times_X X''}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$$

et

$$\text{pr}_2 : (X' \times_X X'', (\mathcal{T}' \star \mathcal{T}'')_{X' \times_X X''}) \longrightarrow (X'', \mathcal{T}'').$$

Exercice 4

Soient $f' : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ et $f'' : (X'', \mathcal{T}'') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ deux applications continues. Montrer que pour toutes applications continues $g' : (Y, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$

et $g'' : (Y, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ telles que $f' \circ g' = f'' \circ g''$, il existe une unique application continue

$$h : (Y, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (X' \times_X X'', (\mathcal{T}' \star \mathcal{T}'')_{X' \times_X X''})$$

telle que $\text{pr}_1 \circ h = g'$ et $\text{pr}_2 \circ h = g''$. (Faire un dessin pour s'aider!)

Exercice 5

Faites le monde "Connected sets" du Topology Game.