Série 7 MATH-220

le 3 novembre 2025

L'exercice 2 peut être rendu pour correction le lundi 3 novembre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec ($\star$) sont facultatifs.

Exercice 1

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $Y \subseteq X$, $Y' \subseteq X'$ deux sous-ensembles. Montrer que la topologie produit $\mathcal{T}|_Y \star \mathcal{T}'|_{Y'}$ et la topologie de sous-espace $(\mathcal{T} \star \mathcal{T}')|_{Y \times Y'}$ sur $Y \times Y'$ sont égales.

Exercice 2

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit. Montrer que

1. si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont fermés par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, respectivement, alors $A \times B \subseteq X \times Y$ est aussi fermé, par rapport à $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$.
2. si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ sont deux sous-ensembles, alors $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ dans $X \times Y$, où l'adhérence à gauche est calculée par rapport à $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$ et celles à droite par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, respectivement.

Exercice 3

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est **ouverte** si, pour tout $U \subseteq X$ ouvert, $f(U) \subseteq Y$ est aussi ouvert.

1. Montrer que les projections $\pi_1\colon X \times Y \to X$ et $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ sont des applications ouvertes par rapport à la topologie produit et les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement.
2. Est-ce que toute application continue est ouverte? Si oui, démontrer l'affirmation. Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 4

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ et $(Z, \mathcal{T}_Z)$ des espaces topologiques.

1. Montrer que $(X \times Y, \mathcal{T}_X \star \mathcal{T}_Y)$ et $(Y \times X, \mathcal{T}_Y \star \mathcal{T}_X)$ sont homéomorphes.

2. Montrer que $\big(X \times (Y \times Z), \mathcal{T}_X \star (\mathcal{T}_Y \star \mathcal{T}_Z)\big)$ et $\big((X \times Y) \times Z, (\mathcal{T}_X \star \mathcal{T}_Y) \star \mathcal{T}_Z\big)$ sont homéomorphes.

   Remarque : Grâce à cet homéomorphisme, on peut se permettre simplement d'écrire $(X \times Y \times Z, \mathcal{T}_X \star \mathcal{T}_Y \star \mathcal{T}_Z)$*, sans les parenthèses, sans ambiguïté.*

3. $(\star)$ Montrer que $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie standard, est homéomorphe à l'espace $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (le produit n fois), où $\mathbb{R}$ est aussi munie de la topologie standard.

Exercice 5

Soit I un ensemble (peut-être infini), et soient $\{X_i\}_{i \in I}$ et $\{Y_i\}_{i \in I}$ des familles des ensembles.

Déterminer si les affirmations suivantes sont correctes. Sinon, déterminer laquelle des inclusions "$\subseteq$" ou "$\supseteq$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

1. $$(\prod_{i \in I} X_i) \cap (\prod_{i \in I} Y_i) = \prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i).$$

2. $$(\prod_{i \in I} X_i) \cup (\prod_{i \in I} Y_i) = \prod_{i \in I} (X_i \cup Y_i)$$

3. $$(\prod_{i \in I} X_i) \setminus (\prod_{i \in I} Y_i) = \prod_{i \in I} (X_i \setminus Y_i)$$

Exercice 6

Faites le monde "Empty" du Topology Game.