

Série 6 MATH-220

le 27 octobre 2025

L'exercice 1 peut être rendu pour correction le lundi 3 novembre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec (\star) sont facultatifs.

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que pour tout $A \subseteq X$, l'adhérence de A par rapport à la topologie métrique \mathcal{T}_d est donnée par

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\},$$

où $d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$.

(*Hint: Utiliser la caractérisation des adhérences.*)

2. Montrer que pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$, la boule fermée

$$\overline{B}(x, \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

est vraiment fermée dans (X, \mathcal{T}_d) .

3. Montrer que pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$, l'adhérence de la boule ouverte $B(x, \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ est incluse dans la boule fermée $\overline{B}(x, \epsilon)$, c'est-à-dire

$$\overline{B(x, \epsilon)} \subseteq \overline{B}(x, \epsilon).$$

4. (\star) Donner un exemple où $\overline{B(x, \epsilon)} \subsetneq \overline{B}(x, \epsilon)$.

Exercice 2

1. Montrer que la collection

$$\mathcal{T}_{\text{fin}} := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$$

est une topologie sur \mathbb{R} , que l'on appelle la **topologie du complément fini**.

2. Montrer que tous les sous-espaces de \mathbb{R} sont compacts par rapport à la topologie du complément fini \mathcal{T}_{fin} sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Quelle doit être la cardinalité d'un ensemble pour qu'il soit compact lorsqu'on le munit de la topologie

1. discrète?
2. grossière?
3. du complément fini?

Exercice 4

Rappeler la définition $K := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ de la série 4.

Est-ce que \mathbb{R} muni de la topologie standard est compact? Et \mathbb{Q} ? Et \mathbb{N} ? Et K ? Et $K \cup \{0\}$??

Exercice 5 (★)

On munit \mathbb{R}^2 de la topologie standard, et on considère le sous-espace

$$S := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}.$$

1. Est-ce que S est fermé?
2. Est-ce que S est compact?

Exercice 6 (★)

Soit X un espace topologique et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés emboîtés non vides de X telle que F_0 est compact. Montrer que

- (a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$;
- (b) si U est un ouvert de X qui contient $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, alors U contient l'un des fermés de la suite.

Exercice 7

Faites les mondes "Family Intersection" et "FamUnion" du Topology Game.