Série 5 MATH-220

le 13 octobre 2025

L'exercice 4 peut être rendu pour correction le lundi 27 octobre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec ($\star$) sont facultatifs.

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $Y \subseteq X$.

1. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$, alors $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ est une base de $\mathcal{T}_Y$.

2. Soit $A \subseteq Y$. Montrer que l'adhérence de A par rapport à $\mathcal{T}_Y$ est égale à $\overline{A} \cap Y$, où $\overline{A}$ est son adhérence par rapport à $\mathcal{T}$.

Exercice 2

Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 5 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 4\cos(\pi x) & \text{if } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dire si f est continue par rapport à $(\mathcal{T}_{st})_{[0,2]}$ et $\mathcal{T}_{st}$.

(Hint: Utiliser le lemme de recollement.)

Exercice 3 ($\star$)

Trouver un exemple qui montre qu'on ne peut pas généraliser le Lemme de Recollement au cas infini. Plus précisément, trouver des espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$, ainsi qu'une application $f\colon X \to Y$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces fermés de X tels que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ et $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{T}_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais f ne l'est pas par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

Exercice 4

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ des espaces topologiques, et soit $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

(ii) $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ pour tout $A \subseteq Y$.

(iii) $f^{-1}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$ pour tout $A \subseteq Y$.

Montrer par des exemples que les inclusions ci-dessus peuvent être strictes.

Exercice 5

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, M, $N \subseteq X$, et $\{M_i\}_{i\in I}$ un ensemble des sous-ensembles de X. Déterminer si les affirmations suivantes sont correctes. Sinon, déterminer laquelle des inclusions "$\subseteq$" ou "$\supseteq$" est vraie et donner un contre-exemple pour l'autre.

1. si $M \subseteq N$, alors $\overline{M} \subseteq \overline{N}$;
2. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;
3. $\bigcup_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} M_i}$;
4. $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$;
5. $\bigcap_{i\in I} \overline{M_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} M_i}$;

Exercice 6

Faites les mondes "Functions" et "Continuous" du Topology Game.