# Série 4 MATH-220

le 6 octobre 2025

L'exercice 6 peut être rendu pour correction le lundi 13 octobre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec ($\star$) sont facultatifs.

## Exercice 1

Montrer que les collections suivantes sont des bases de topologie sur $\mathbb{R}$.

1. $\mathcal{B}_K := \{\,]a,b[\ \mid a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]a,b[\setminus K \mid a < b \in \mathbb{R}\}$
   où $K := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. On note $\mathcal{T}_K$ la topologie determinée par $\mathcal{B}_K$.

2. $\mathcal{B}_{\text{limsup}} := \{\,]a,b]\ \mid a < b \in \mathbb{R}\}$.
   La topologie $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ determinée par $\mathcal{B}_{\text{limsup}}$ est appelée la **topologie de la limite supérieure**.

3. Déterminer lesquelles des topologies $\mathcal{T}_{st}$, $\mathcal{T}_K$, et $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ sont comparables. Lorsque deux topologies sont comparables, dire laquelle des deux est plus fine.

## Exercice 2

1. Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$, et soit

   $$\mathcal{S} = \big\{\{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}\big\} \subset \mathcal{P}(X).$$

   Expliquer pourquoi $\mathcal{S}$ est une sous-base de topologie, et expliciter la topologie engendrée par $\mathcal{S}$ sur $X$.

2. Expliquer pourquoi le sous-ensemble

   $$\mathcal{S} = \big\{[a, a+1] : a \in \mathbb{R}\big\}$$

   de $\mathcal{P}(X)$ est une sous-base de topologie. Décrire la topologie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{S}$.

3. Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$, muni de la topologie discrète $\mathcal{T}_{\text{disc}}$. Trouver une sous-base $\mathcal{S}$ pour $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ telle que $\mathcal{S}$ ne contient aucun singleton.

## Exercice 3 ($\star$)

1. Montrer que la collection $\{a\mathbb{Z}+b\}_{a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},b\in\mathbb{Z}}$ est une base de topologie pour $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que chaque $a\mathbb{Z}+b$, avec $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et $b\in\mathbb{Z}$, est fermé et ouvert.
3. Montrer que
$$\mathbb{Z}\setminus\{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z}+0).$$
4. Conclure qu'il y a une infinité de nombres premiers.

## Exercice 4

Considérer l'ensemble $X=\{a,b,c,d\}$, muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, X\big\},$$

et l'application $f : X \to X$ définie par

$$a \mapsto b,\ b \mapsto d,\ c \mapsto b,\ d \mapsto c.$$

Déterminer pour tout $x \in X$ si $f$ est continue en $x$ par rapport à $\mathcal{T}$.

## Exercice 5

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) := |x|\cdot\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases},$$

est continue seulement en 0, par rapport à la topologie standard sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 6

Un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ est appelé *métrisable* s'il existe une métrique $d$ sur $X$ telle que $\mathcal{T}=\mathcal{T}_d$, la topologie induite par la métrique $d$. Montrer que "être métrisable" est une propriété topologique, i.e., si $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ sont homéomorphes, et $(X,\mathcal{T})$ est métrisable, alors $(X',\mathcal{T}')$ est aussi métrisable.

## Exercice 7

Faites les mondes "Combination world" et "Topological spaces" du Topology Game.