Série 3 MATH-220

le 29 septembre 2025

Il n'y aura aucun rendu écrit cette fois, mais il y aura un corrigé qui tiendra compte des discussions en séance d'exercices.

Quelques remarques importantes :

- Les exercices ci-dessous utilisent les notions de *topologie*, de *base*, et de *sous-base*, ainsi que celle d'une *application continue entre espaces topologiques*, vues au cours aujourd'hui et rappelées ci-dessous.
- Les définitions d'un *sous-espace métrique* et du *produit de deux espaces métriques* peuvent servir de sources d'inspiration, pour l'exercice 1 et l'exercice 2, respectivement.
- C'est souvent une bonne idée de tester vos hypothèses sur des exemples concrets, tels que des espaces métriques, des espaces topologiques finis, ou la topologie discrète ou grossière.

Déroulement de la séance pour chaque exercice (les temps sont approximatifs) :

1. (10 min) Réflexion silencieuse, en notant ses idées par écrit
2. Election d'un porte-parole de chaque groupe
3. (2 min/personne) Présentation à tour de rôle des idées de chaque membre du groupe
4. (10 min) Brainstorming au sein du groupe
5. (5 min) Préparation collaborative d'un résumé des idées du groupe
6. (15 min) Présentation brève des idées de chaque groupe, suivie d'une discussion de toute la classe

Au cours du 6 octobre, je consoliderai les notions explorées dans cette série.

Quelques rappels du cours

Definition 0.1. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X consiste en un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X tel que

- (T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- (T2) $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}, \forall I$; et
- (T3) $\{U_1, ..., U_n\} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé un *espace topologique*.

Definition 0.2. Soit X un ensemble. Une *base de topologie* sur X consiste en un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X tel que

- (B1) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$; et
- (B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definition 0.3. Soit X un ensemble. Une *sous-base de topologie* sur X consiste en un ensemble $\mathcal{S}$ de parties de X tel que

- (S1) $X = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$.

Definition 0.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Une application $f : X \to X'$ est *continue* par rapport aux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ si $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ pour tout $U' \in \mathcal{T}'$. On écrit alors que "$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue".

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit Y un sous-ensemble de X. Soit $\iota : Y \to X$ l'inclusion de Y dans X.

1. Donner un exemple d'une topologie $\mathcal{T}'$ sur Y telle que
$$\iota : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$$
soit continue.
2. Quelle est la *plus petite* topologie $\mathcal{T}'$ sur Y par rapport à laquelle ι est continue? Comment la construire concrètement?
3. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ une application continue. Pour quelles topologies $\mathcal{T}'$ sur Y sait-on que la restriction $f|_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (\widetilde{X}, \widetilde{T})$ est également continue?

Exercice 2

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Soient

$$pr_1 : X \times X' \to X : (x, x') \mapsto x$$

et

$$pr_2 : X \times X' \to X' : (x, x') \mapsto x'$$

les projections sur les deux coordonnées.

1. Donner un exemple d'une topologie $\mathcal{T}''$ sur $X \times X'$ telle que

   $$pr_1 : X \times X' \to X \quad \text{et} \quad pr_2 : X \times X' \to X'$$

   soient toutes les deux continues.

2. Quelle est la *plus petite* topologie $\mathcal{T}''$ sur $X \times X'$ par rapport à laquelle pr_1 et pr_2 sont continues? Comment la construire concrètement?

3. Soient $f : (Y, \widetilde{\mathcal{T}}) \to (X, \mathcal{T})$ et $f' : (Y, \widetilde{\mathcal{T}}) \to (X', \mathcal{T}')$ des applications continues. Considérer l'application

   $$g : Y \to X \times X' : y \mapsto \big(f(y), f'(y)\big).$$

   Pour quelles topologies $\mathcal{T}''$ sur $X \times X'$ sait-on que

   $$g : (Y, \widetilde{T}) \to (X \times X', \mathcal{T}'')$$

   est continue?