Série 2 MATH-220

le 15 septembre 2025

L'exercice 2 peut être rendu pour correction le lundi 29 septembre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec ($\star$) sont facultatifs.

Exercice 1

Donner un exemple d'une application entre espaces métriques qui est continue, mais qui n'est K–Lipschitz pour aucun K.

Exercice 2

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est dite *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \forall (x,y) \in X \times X \ \left(d_X(x,y) \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\right).$$

1. Montrer que si f est uniformément continue, alors f est continue.
2. Montrer que s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que f est K–Lipschitz, alors f est uniformément continue.
3. Donner un exemple d'une application entre espaces métriques qui est continue, mais pas uniformément continue.
4. ($\star$) Donner un exemple d'une fonction entre espaces métriques qui est uniformément continue, mais qui n'est K–Lipschitz pour aucun $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ et (Z, d_Z) des espaces métriques, et soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des applications.

1. Montrer que si f et g préservent les distances, alors $g \circ f$ préserve les distances.
2. Montrer que si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Exercice 4

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, avec X fini.

Montrer que pour toute application $f\colon X \to Y$, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que f est K–Lipschitz.

Exercice 5

Faites les mondes "Intersection world" et "Union world" du Topology Game.