

Série 1 MATH-220

le 8 septembre 2025

L'exercice 3 peut être rendu pour correction le lundi 15 septembre (un rendu par groupe).

Les exercices marqués avec (★) sont facultatifs.

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes définissent des métriques sur \mathbb{R}^n .

1. (Distance de Manhattan) $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
2. (∞ -distance) $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

Exercice 2

Soit $X = \{x_0, x_1, x_2\}$, et soit $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application telle que

$$d(x_0, x_1) = 1,$$

et

$$d(x_0, x_2) = r,$$

où $r \in (0, \infty)$. Quelles sont les valeurs possibles de $d(x_1, x_2)$ telles que d soit une métrique ?

Exercice 3 (Métrique de Hausdorff sur les sous-espaces métriques)

Soit (M, d) un espace métrique. Pour $Y \subseteq M$ fini et $x \in M$, poser

$$d_{\text{inf}}(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Etant donné deux parties finies $X, Y \subseteq M$, poser

$$d_{\text{Haus}}(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d_{\text{inf}}(x, Y), \sup_{y \in Y} d_{\text{inf}}(y, X) \right\}.$$

1. Montrer que d_{Haus} est une métrique sur l'ensemble

$$\{Y \mid Y \subseteq M, Y \text{ fini}, Y \neq \emptyset\}$$

des parties finies et non vides de M .

2. (★) Trouver un exemple qui montre que l'on n'obtient pas forcément une métrique si l'on considère l'ensemble de *toutes* les parties de M , même infinies.
3. Soit $M = \mathbb{R}^2$, muni de sa métrique euclidienne, et soit $X = \{(0, 2), (0, 0)\}$ et $Y = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 2)\}$. Calculer $d_{\text{Haus}}(X, Y)$.

(★) Exercice 4

Soit $M(n)$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$. Montrer que l'application $d_{\text{rank}}: M(n) \times M(n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, donnée par

$$d_{\text{rank}}(A, B) = \text{rank}(A - B)$$

est une métrique sur $M(n)$.

(★) Exercice 5

Pour quels $p \in (0, \infty)$ est-ce que la fonction $d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p$$

est une métrique?

Exercice 6

Faites les deux premiers mondes ("Subset world" et "Complement world") du Topology Game.