Série 13 MATH-220

le 15 decembre 2025

Les exercices marqués avec ($\star$) sont facultatifs.

Exercice 1

1. Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs), est-ce qu'il est aussi connexe (par arcs) ?
2. Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs), est-ce qu'il est aussi localement connexe (par arcs) ?

Exercice 2

Montrer que

1. ≪Etre localement connexe≫ est une propriété topologique.
2. ≪Etre localement connexe par arcs≫ est une propriété topologique.

Exercice 3

Est-ce que $\mathbb{Q}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie induite par la topologie standard ? Et K ? Et $K \cup \{0\}$? Et $\mathbb{N}$? Et $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Comment est-ce que la connexité (par arcs) locale se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques ? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ est localement connexe (par arcs).
2. Si $(X', \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors X est localement connexe (par arcs).
3. Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $A \subseteq X$, alors A est localement connexe (par arcs).
4. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq X$ est localement connexe (par arcs), alors $\overline{A}$ est localement connexe (par arcs).

5. Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs).
6. Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs).
7. Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques localement connexes (par arcs), alors leur produit $(\prod_{i \in I} X_i, *_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est localement connexe (par arcs).
8. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles tels que $X = A \cup B$. Si A et B sont localement connexes (par arcs), alors X est localement connexe (par arcs). Et si ensuite $A \cap B \neq \emptyset$?
9. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles. Si A et B sont localement connexes (par arcs), alors $A \cap B$ est localement connexe (par arcs).

Exercice 5

Trouver les composantes connexes (par arcs) de tous les espaces de l'exercice 2.