

Série 12 MATH-220

le 8 decembre 2025

L'exercice 3 peut être rendu pour correction le lundi 15 décembre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec (\star) sont facultatifs.

Exercice 1

Montrer que «être connexe» est une propriété topologique, i.e., si (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') sont homéomorphes, alors (X, \mathcal{T}) est connexe si et seulement si (X', \mathcal{T}') est connexe.

Exercice 2

Comment est-ce que la connexité (par arcs) se comporte par rapport aux constructions suivantes? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

1. Si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue et (X, \mathcal{T}) est connexe (par arcs), alors $(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ l'est aussi.
2. Si $A \subseteq X$ et (X, \mathcal{T}) est connexe (par arcs), alors (A, \mathcal{T}_A) l'est aussi.
3. Si \mathcal{T}' est plus fine que \mathcal{T} et (X, \mathcal{T}) est connexe (par arcs), alors (X, \mathcal{T}') l'est aussi.
4. Si \mathcal{T}' est moins fine que \mathcal{T} et (X, \mathcal{T}) est connexe (par arcs), alors (X, \mathcal{T}') l'est aussi.
5. Si (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') sont connexes par arcs, alors $(X \times X', \mathcal{T} \star \mathcal{T}')$ l'est aussi.

Exercice 3

Montrer que tout espace topologique connexe par arcs est connexe.

Exercice 4

Montrer que la relation «connexité» sur l'ensemble sous-jacent à un espace topologique est une relation d'équivalence.

Rappel : Si (X, \mathcal{T}) est un espace topologique, la relation «connexité», notée \sim , sur l'ensemble X est celle définie par

$$x \sim y \iff \exists A \subset X \text{ tel que } (A, \mathcal{T}_A) \text{ connexe et } x, y \in A.$$

Exercice 5

Démontrer que $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ n'est pas homéomorphe à $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Indice : Utiliser la notion de connexité.