

# Série 11 MATH-220

le 1er décembre 2025

Il n'y aura aucun rendu écrit cette fois. Nous mettrons un résumé des discussions en séance d'exercices sur le Moodle.

## **Déroulement suggéré de la séance (les temps sont approximatifs)**

Pour chaque exercice:

1. (5 min) Réflexion silencieuse, en notant ses idées par écrit
2. (5 min) Présentation à tour de rôle des idées de tous les membres du groupe
3. (5 min) Brainstorming au sein du groupe

Pour la dernière partie de la séance:

1. (5 min) Préparation collaborative d'un résumé des idées du groupe
2. (20 min) Présentation brève des idées de chaque groupe, suivie d'une discussion de toute la classe

Le but de cette série d'exercices de bien comprendre la propriété topologique de l'intervalle fermé qui est au cœur de la preuve du Théorème de la valeur intermédiaire, que l'on formule généralement comme ceci.

**Theorem 0.1.** Soient  $a < b$  des nombres réels. Soit

$$f : ([a, b], (\mathcal{T}_{st})_{[a,b]}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$$

une application continue. Si  $f(a) < f(b)$ , alors pour tout  $y \in [f(a), f(b)]$ , il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = y$ .

Une formulation équivalente qui est peut-être un peu plus facile à généraliser à d'autres espaces topologiques est la suivante.

**Theorem 0.2.** Soient  $a < b$  des nombres réels. Soit

$$f : ([a, b], (\mathcal{T}_{st})_{[a,b]}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$$

une application continue. Si  $x, y \in \text{Im}(f)$  avec  $x < y$ , alors  $[x, y] \subseteq \text{Im}(f)$ .

**Definition 0.3.** Pour les besoins de cette série exploratoire, disons qu'un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  vérifie la *propriété de la valeur intermédiaire (PVI)* si pour toute application continue  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$  et tous  $x < y \in \text{Im}(f)$ , on a que  $[x, y] \subseteq \text{Im}f$ .

---

## Exercice 1

Trouver au moins deux espaces topologiques  $(X, \mathcal{T})$  qui ne vérifient pas la PVI. Qu'est-ce que vos exemples ont en commun?

## Exercice 2

Trouver au moins deux espaces topologiques  $(X, \mathcal{T})$  tels que  $\#X = 3$  qui vérifient la PVI. Qu'est-ce que ces espaces ont en commun?

## Exercice 3

Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  est continue, et  $(X, \mathcal{T})$  vérifie la PVI, est-ce que  $(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$  la vérifie également?

## Exercice 4

Est-il vrai que tout sous-espace d'un espace qui vérifie la PVI la vérifie également? Si vous avez assez de temps, réfléchissez aussi aux produits finis.

## Exercice 5

Essayer de formuler une caractérisation de la PVI uniquement en termes des ouverts de la topologie, sans faire référence à une application continue.