

Série 10 MATH-220

le 24 novembre 2025

L'exercice 2 peut être rendu pour correction le lundi 1er décembre (un rendu par groupe). Les exercices marqués avec (*) sont facultatifs.

Exercice 1

Montrer ou réfuter que

1. Si (X, \mathcal{T}) est un espace topologique de Hausdorff et $A \subseteq X$ un sous-ensemble de X , alors le sous-espace (A, \mathcal{T}_A) est de Hausdorff aussi.
2. Si (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') sont des espaces topologiques de Hausdorff, alors le produit $(X \times X', \mathcal{T} * \mathcal{T}')$ est aussi de Hausdorff.
3. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ sont des espaces topologiques de Hausdorff, où I est un ensemble quelconque, alors le produit $(\prod_{i \in I} X_i, *_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est aussi de Hausdorff.
4. Si (X, \mathcal{T}) est un espace topologique de Hausdorff et \mathcal{T}' est une topologie plus fine sur X , alors (X, \mathcal{T}') est aussi de Hausdorff.
5. Si (X, \mathcal{T}) est un espace topologique de Hausdorff et \mathcal{T}' est une topologie moins fine sur X , alors (X, \mathcal{T}') est aussi de Hausdorff.

Definition

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. Un sous-ensemble $D \subseteq X$ est **dense** par rapport à \mathcal{T} si, pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$, il existe un élément $d \in D$ tel que $d \in U$.

Exercice 2

Soient (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{T}') deux espaces topologiques.

1. Montrer que (Y, \mathcal{T}') est de Hausdorff si et seulement si la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) | y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

est fermée par rapport à la topologie produit $\mathcal{T}' * \mathcal{T}'$ sur $Y \times Y$.

2. Si (Y, \mathcal{T}') est de Hausdorff, $D \subseteq X$ est dense (par rapport à \mathcal{T}) et $f, g: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ sont continues, montrer que $f = g$ si et seulement si $f|_D = g|_D$.

Exercice 3

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. Montrer que

1. si (X, \mathcal{T}) est normal et A est un fermé de X , alors (A, \mathcal{T}_A) est aussi normal.
2. si \mathcal{T} est la topologie du complément fini sur X , alors (X, \mathcal{T}) est régulier si et seulement s'il est normal. (Pour la définition de la topologie du complément fini, voir série 6.)

Exercice 4

Comment est-ce que les propriétés de séparation se comportent par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

1. Si (X, \mathcal{T}) est régulier (resp. normal) et $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ est régulier (resp. normal).
2. Si (X', \mathcal{T}') est régulier (resp. normal) et $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $(f^{-1}(X'), \mathcal{T}_{f^{-1}(X')})$ est régulier (resp. normal).
3. Si (X, \mathcal{T}) est régulier (resp. normal) et \mathcal{T}' est une topologie plus fine que \mathcal{T} , alors (X, \mathcal{T}') est régulier (resp. normal).
4. Si (X, \mathcal{T}) est régulier (resp. normal) et \mathcal{T}' est une topologie moins fine que \mathcal{T} , alors (X, \mathcal{T}') est régulier (resp. normal).

Exercice 5

Faites les exercices suivants de la série 9, mais cette fois en utilisant le fait qu'une application continue et bijective d'un espace compact vers un espace de Hausdorff est un homéomorphisme.

- Exercice 3
- Exercice 5