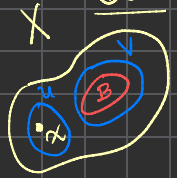


Proposition: Soit $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ une application continue et bijective. Si (X, \mathcal{T}) est compact et (X', \mathcal{T}') est de Hausdorff, alors f est en fait un homéomorphisme.

④ Espaces réguliers

Condition de séparabilité plus restrictive.

Défⁿ: Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique tel que tout singleton est fermé. Alors (X, \mathcal{T}) est un espace régulier si $\forall x \in X, \forall B$ fermé tq $x \notin B$,
 $\exists U, V \in \mathcal{T}$ tq $x \in U, B \subseteq V$, et $U \cap V = \emptyset$.



Rmq: régulier \Rightarrow Hausdorff, mais Hausdorff \nRightarrow régulier.

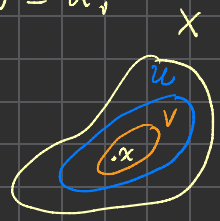
Exemples: (1) (X, \mathcal{T}_{disc}) est régulier.

(1) Tout espace métrisable est régulier.

Proposition: Si (X, \mathcal{T}) est compact et de Hausdorff, alors il est régulier.

Caractérisation des espaces réguliers: Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique tq tout singleton est fermé. Alors:

(X, \mathcal{T}) régulier $\Leftrightarrow \forall x \in U \in \mathcal{T}, \exists x \in V \in \mathcal{T}$ tq $\bar{V} \subseteq U$,



(c) Espaces normaux

Et une condition de séparabilité encore plus restrictive --

Défⁿ: Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique tel que tout singleton est fermé.



Si $\forall A, B \subseteq X$ fermés et disjoints, $\exists U, V \in \mathcal{T}$ disjoints tq $A \subseteq U, B \subseteq V$, alors (X, \mathcal{T}) est **normal**.

Rmq: Normal \Rightarrow régulier mais régulier $\not\Rightarrow$ normal.

Caractérisation des espaces normaux: Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique tq tout singleton est fermé. Alors:

(X, \mathcal{T}) normal $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X$ fermé, $\forall A \subseteq U \in \mathcal{T}$,
 $\exists A \subseteq V \in \mathcal{T}$ tq $\bar{V} \subseteq U$.



Rmqs: 1) \exists espaces normaux dont les sous-espaces ne sont pas forcément normaux.

2) \exists espaces normaux (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') tq
 $(X \times X', \mathcal{T} * \mathcal{T}')$ pas normal