

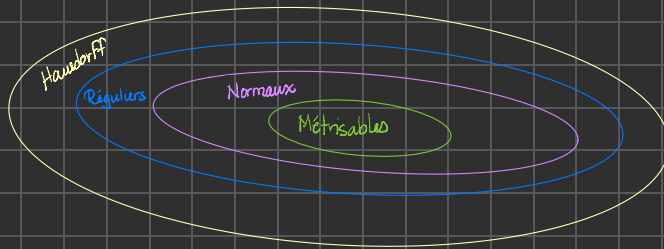
Proposition : "Etre normal" est une propriété topologique.

Sources d'espaces normaux : Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique.

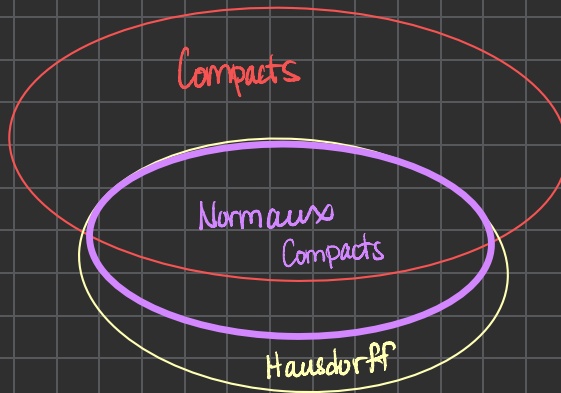
i) Si (X, \mathcal{T}) est régulier et admet une base dénombrable, alors (X, \mathcal{T}) est normal. ← e.g., si X dénombrable

ii) Si (X, \mathcal{T}) est métrisable, alors il est normal.

iii) Si (X, \mathcal{T}) est compact et de Hausdorff, alors il est normal.



i

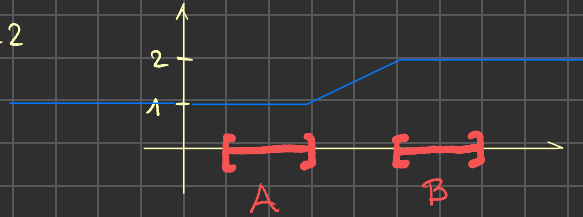


(d) Le Lemme d'Urysohn et ses conséquences

La normalité d'un espace a des implications importantes pour des applications continues dont cet espace est le domaine.

Le Lemme d'Urysohn: Si (X, \mathcal{T}) est un espace topologique normal, alors $\forall A, B \subseteq X$ fermés disjoints et $\forall a < b \in \mathbb{R}$, \exists application continue $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow ([a, b], (\mathcal{T}_{\mathbb{R}})_{[a, b]})$ tq $f(x) = a \ \forall x \in A$, $f(x) = b \ \forall x \in B$.

Ex: $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ $A = [\alpha_1, \alpha_2]$, $B = [\beta_1, \beta_2]$ où $\alpha_2 < \beta_1$
 $a=1, b=2$



Plus difficile si $X = \mathbb{R}^n$, A, B boules fermées ...

Esquisse de preuve: Sans perte de généralité, $a=0$ et $b=1$

Choisir une bijection $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]: n \mapsto g_n$

telles que $g_0 = 1$ et $g_1 = 0$.

Affirmation ①: $\exists \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}$ tq $A \subseteq U_n \subseteq X \setminus B$

$\forall n$ et $g_i < g_j \Rightarrow \overline{U_i} \subseteq U_j$. (★)

Idée: Par récurrence sur n . Poser $\mathcal{U}_0 = X \setminus B$.

Caractérisation de la normalité $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{U}_1 \in \overline{A} \in \mathcal{U}_0$.

Etant donné $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\}$ vérifiant $(*)$, soit

$$q_k = \max \{q_i \mid q_i < q_{n+1}, 1 \leq i \leq n\}$$

$$q_\ell = \min \{q_i \mid q_i > q_{n+1}, 1 \leq i \leq n\}$$

$(*) \Rightarrow \overline{A_k} \in \mathcal{U}_0$, d'où par la caractérisation de la normalité, $\exists \overline{A_k} \in \mathcal{U}_{n+1} \in \overline{\overline{A_k}} \in \mathcal{U}_0$.

Affirmation (2): L'application $f: X \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{q_i \mid x \in \mathcal{U}_i\} & : x \in X \setminus B \\ 1 & : x \in B \end{cases} \text{ vérifie}$$

$f(x) = 0 \ \forall x \in A$ et est continue p.r. à \mathcal{T} et $(\mathcal{B}_A)_{[0,1]}$.

Idée: $A \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \inf \{q_i \mid x \in \mathcal{U}_i\} = 0 \ \forall x \in A$.

• Observer que $x \in \overline{\mathcal{U}_i} \Rightarrow f(x) \leq q_i$ et que

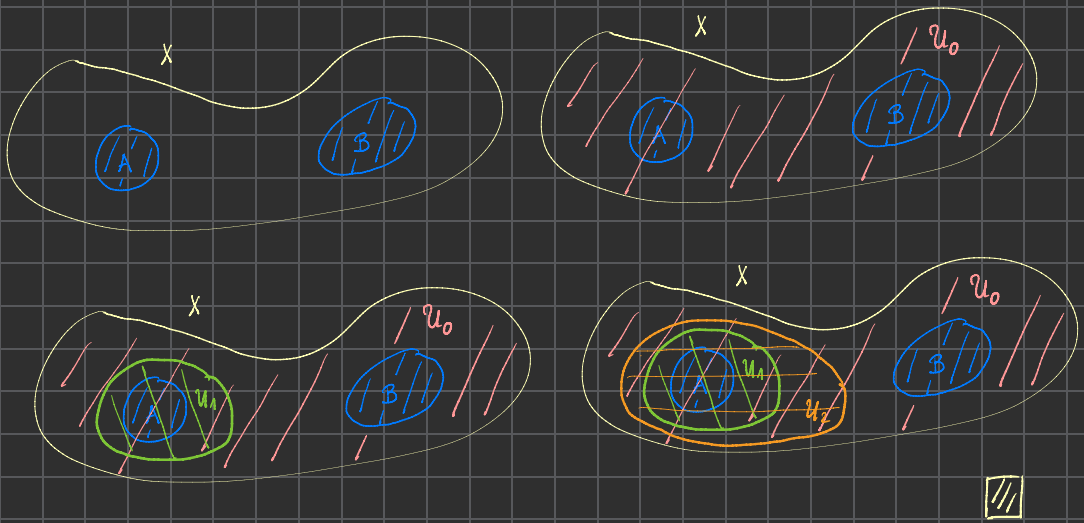
$$x \in X \setminus \mathcal{U}_i \Rightarrow f(x) \geq q_i.$$

• Continuité en $x_0 \in X$: si $0 < s < f(x_0) < t < 1$:

$\exists q_i, q_j$ tq $s < q_i < f(x_0) < q_j < t$, d'où

$$x_0 \in \mathcal{U}_j \setminus \overline{\mathcal{U}_i} \text{ et } f(\mathcal{U}_j \setminus \overline{\mathcal{U}_i}) \subseteq [q_i, q_j] \subseteq]s, t[.$$

- La continuité en $x_0 \in X$ $f(x_0) \in \mathcal{F}_0, \mathcal{I}$ se démontre de manière semblable.



Conséquences importantes de ce lemme ...

Théorème de métrisation d'Urysohn: Tout espace régulier qui admet une base dénombrable est métrisable.

Rmq: Ce thm est un inverse partiel à l'implication métrisable \Rightarrow normal.

Esquisse de preuve: Soit (X, \mathcal{T}) régulier, avec une base dénombrable $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Stratégie: Trouver une application continue et injective

$$f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}, *_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$$

dont la restriction à l'image est ouverte.

Défⁿ de \mathcal{F} : • Lemme d'Urysohn $\Rightarrow \forall k, l \in \mathbb{N}$ tq $\overline{B_k} \subseteq B_l$

$\exists f_{k,l} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow ([0,1], (\mathcal{F}_{[0,1]}))$ tq

$f_{k,l}(\overline{B_k}) = \{1\}$ et $f_{k,l}(X \setminus B_l) = \{0\}$.

• $\forall x \in \mathcal{U} \in \mathcal{T}, \exists B_x \in \mathcal{B}$ tq $x \in B_x \subseteq \mathcal{U}$.

Par la caractérisation de la régularité, $\exists B_k$ tq

$x \in B_k \subseteq \overline{B_k} \subseteq B_x \subseteq \mathcal{U}$, d'où $f_{k,l}(x) = 1$

et $f_{k,l}(X \setminus B_x) = \{0\}$.

• $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : x \mapsto (f_{k,l}(x))_{k,l}$

- continue car chaque composante continue

- injective car $x \neq x' \Rightarrow \exists x \in B_k, x' \in B_{k'}, B_k \cap B_{k'} = \emptyset$.

donc $\exists k$ tq $f_{k,l}(x) = 1, f_{k,l}(x') = 0$.

- ouverte lorsque restreinte à $f(X)$ car $\forall x \in \mathcal{U} \in \mathcal{T}$,

$\exists (k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tq $f_{k,l}(x) > 0$ d'où:

$f(x) \in \text{pr}_{k,l}^{-1}]0, 2[\cap f(X) \subseteq f(\mathcal{U})$. □

Théorème d'extension de Tietze: Si (X, \mathcal{T}) est normal, alors

$\forall A \subseteq X$ fermé, $\forall a < b \in \mathbb{R}, \forall f : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow ([a,b], (\mathcal{F}_{[a,b]}))$,

continue, $\exists \hat{f} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow ([a,b], (\mathcal{F}_{[a,b]}))$ continue

tq $\hat{f}|_A = f$.

$$\begin{array}{ccc} (A, \mathcal{T}_A) & \xrightarrow{\forall f} & ([a, b], (\mathcal{T}_{\hat{f}})_{[a, b]}) \\ \downarrow \cong & & \nearrow \exists \hat{f} \\ (X, \mathcal{T}) & & \end{array}$$