Section Mathématiques

Topologie I — Topologie générale

Professeure Kathryn Hess Bellwald

Mise en page : Naoki Bourquenoud, 2025–2026

Table des matières

Introduction

La *Topologie* est une branche fondamentale des mathématiques qui étudie les propriétés d'un objet géométriques qui sont préservées par des déformations continues. Elle provient des mots

$$\tau\epsilon\pi o\sigma \qquad \text{et} \qquad \lambda o\gamma o\sigma$$

qui signifient “lieu” et “étude” en grecque, reflétant l'idée de l'étude des lieux ou plus exactement l'étude de la position entre des relations entre les points dans un espace.

Parmi les nombreuses branches sous-jacentes qui existent, la *Topologie générale* s'occupe des définitions et constructions de base issues de la théorie des ensembles. Les concepts fondamentaux en Topologie générale sont la *continuité*, la *compacité* et la *connexité* et elle constitue le fondement de la plupart des autres formes de Topologie plus avancées comme la Topologie *algébrique*, *géométrique* ou encore *différentielle*.

Voici un aperçu détaillé des sujets que nous explorerons au cours de ce premier semestre de Topologie.

1. Espaces métriques. Nous connaissons déjà bien la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ qui joue un rôle clé en analyse, notamment dans la formulation de la notion de continuité d'applications. Nous avons également rencontré la notion de distance entre deux vecteurs que l'on peut associer à un produit scalaire sur un espace vectoriel. Nous étudierons, dans cette première partie du cours, une généralisation de ces notions au concept d'un *espace métrique*, dont nous verrons une grande diversité d'exemples. Nous explorerons également différentes façons de comparer deux espaces métriques, par le biais d'applications entre eux qui vérifient diverses conditions — dont une généralisation de la continuité.

2. Une approche axiomatique à la Topologie. La continuité d'une application entre deux espaces métriques pouvant être formulée en termes de *boules* *ouvertes*, il paraît naturel d'examiner de plus près cette notion fondamentale. Dans cette partie du cours, qui en constitue véritablement le cœur, nous étudierons les *espaces topologiques*, c'est-à-dire des ensembles munis d'une notion de *sous-ensemble ouvert*, dont la collection vérifie trois axiomes élémentaires. À partir de cette définition simple et élégante, nous construirons toute la théorie de ces objets, notamment celle des applications entre espaces topologiques qui respectent leur structure supplémentaire de sous-ensembles ouverts — autrement dit, des *applications continues*.

3. Notions de séparabilité. Cette partie du cours portera sur une hiérarchie naturelle et importante d'espaces topologiques, en fonction de la possibilité d'utiliser des ouverts pour "séparer" les parties de l'espace. Ce concept peut sembler peu intuitif au premier abord, mais il s'avère que plus nous parvenons à "séparer" les parties d'un espace topologique, mieux nous pouvons le comprendre, afin, par exemple, de définir une application continue dont l'espace topologique étudié est le domaine.

4. La notion de "connexe". Dire qu'un espace topologique est *connexe* signifie qu'il est, d'une certaine manière, indécomposable en plusieurs sous-parties non triviales. Nous étudierons, dans cette partie du cours, différentes façons de rendre rigoureuse cette notion intuitive, notamment en termes de l'existence de *chemins* reliant des points de l'espace.

Chapitre 1

Espaces métriques

Les espaces métriques ne sont pas qu'un objet abstrait d'analyse. On les retrouve partout dès qu'il s'agit de comparer ou de mesurer des distances : en biologie, en statistiques, dans le traitement de données. C'est déjà de la Topologie, mais sous une forme concrète, souvent finie, qui relie directement les mathématiques au monde réel.

1. Rappels d'analyse et d'algèbre linéaire avancées

NOTATION 1.1. Si X est un ensemble, alors $\#X$ dénote sa cardinalité.

NOTATION 1.2. On notera $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

1.1. Métriques sur $\mathbb{R}^n$.

Quand on parle de distance, on pense probablement d'abord à la distance "normale" entre deux points, celle qu'on connaît tous. Elle est définie par

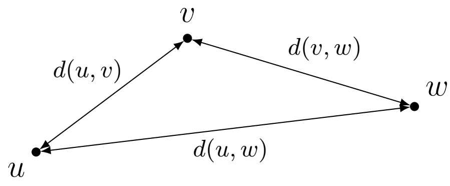
$$\begin{array}{rccl} d_{\text{euc}} & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & (v, w) & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

et est appelée la *distance euclidienne* entre v et w de $\mathbb{R}^n$.

Comme c'est une distance, elle satisfait quelques propriétés importantes :

1. Positivité : $d_{\text{euc}}(v, w) = 0$ si et seulement si $v = w$;
2. Symétrie : $d_{\text{euc}}(v, w) = d_{\text{euc}}(w, v)$ pour tous $v, w \in \mathbb{R}^n$;
3. Inégalité triangulaire : $d_{\text{euc}}(u, w) \leq d_{\text{euc}}(u, v) + d_{\text{euc}}(v, w)$ pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Les deux premières propriétés sont claires, la troisième concernant l'inégalité triangulaire s'interprète comme suit : le moyen le plus court de partir de u pour aller à w est de ne pas faire de détour en passant par un autre point v.



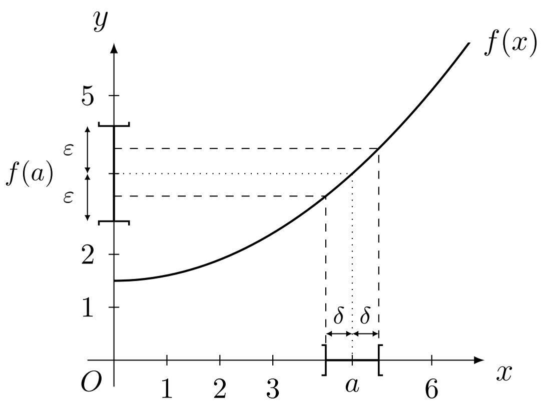
1.2. Continuité des applications $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Définition 1.3. Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est *continue en* v si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$d_{\text{euc}}(v, w) < \delta \implies d_{\text{euc}}(f(v), f(w)) < \varepsilon.$$

On dit qu'elle est *continue* si elle est continue en tout $v \in \mathbb{R}^n$.

On peut interpréter la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en a comme le fait que, pour tout intervalle $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$, il existe un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ tel que pour tout x dans cet intervalle, $f(x)$ reste dans $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$.

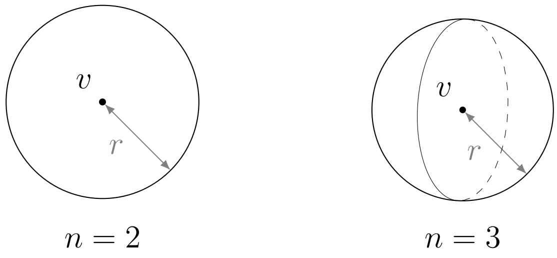


En dimension 1, entourer un point revient ainsi à considérer un intervalle autour de ce point. En dimension supérieure, pour entourer un point dans toutes les directions possibles, il faut un objet géométrique qui s'étend dans toutes les directions de l'espace : c'est ce rôle qu'a l'objet suivant.

Définition 1.4. Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ un nombre réel positif. La *boule ouverte euclidienne de rayon* r *et centrée en* v est l'ensemble

$$B_{\text{euc}}(v, r) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid d_{\text{euc}}(v, w) < r\}.$$

Voici des illustrations de deux boules euclidiennes $B_{\text{euc}}(v, r)$ dans des dimensions différentes :

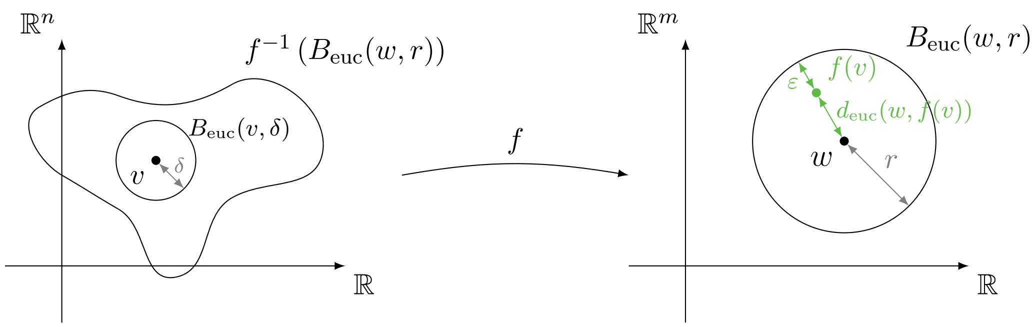


L'introduction de ce nouvel objet nous permet à présent de donner une caractérisation géométrique de la continuité.

Théorème 1.5. **Caractérisation de la continuité.** *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *une fonction. Alors* f *est continue si et seulement si pour tous* $w \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$, *et* $v \in f^{-1}(B_{\text{euc}}(w, r))$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que*

$$B_{\text{euc}}(v, \delta) \subset f^{-1}(B_{\text{euc}}(w, r)) \,.$$

Démonstration. On commence par donner une illustration qui va nous accompagner tout au long de la preuve.



Étant donné un $w \in \mathbb{R}^m$, considérons la boule ouverte $B_{\text{euc}}(w, r)$ autour de ce point. On peut alors regarder sa pré-image $f^{-1}(B_{\text{euc}}(w, r))$.

($\Longrightarrow$) : Considérons un point $v \in f^{-1}(B_{\text{euc}}(w, r))$. Alors on peut dire que $f(v) \in B_{\text{euc}}(w, r)$, autrement dit $d_{\text{euc}}(w, f(v)) < r$. Posons $\varepsilon = r - d_{\text{euc}}(w, f(v))$. Par continuité de f, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$d_{\text{euc}}(v, u) < \delta \implies d_{\text{euc}}(f(v), f(u)) < \varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire (M3), cela implique en particulier que

$$\begin{aligned} d_{\text{euc}}(w, f(u)) &\leq d_{\text{euc}}(w, f(v)) + d_{\text{euc}}(f(v), f(u)) \\ &< (r - \varepsilon) + r \\ &= r \end{aligned}$$

On a donc déduit que $f(u) \in B_{\text{euc}}(w,r)$. Or cela est équivalent à dire que $u \in f^{-1}(B_{\text{euc}}(w,r))$. Comme cela est vrai pour tout point u qui vérifie $d_{\text{euc}}(v,u) < \delta$, on en conclut que $B_{\text{euc}}(v,\delta) \subset f^{-1}(B_{\text{euc}}(w,r))$.

$(\Longleftarrow)$: Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Comme $v \in f^{-1}(B_{\text{euc}}(f(v),\varepsilon))$ et que par hypothèse il existe un $\delta > 0$ tel que $B_{\text{euc}}(v,\delta) \subset f^{-1}(B_{\text{euc}}(f(v),\varepsilon))$, on conclut que

$$d_{\text{euc}}(v,u) < \delta \implies d_{\text{euc}}(f(u),f(v)) < \varepsilon.$$

□

2. Généralisation de la métrique

Puisque la métrique euclidienne joue un rôle central dans les espaces euclidiens, il est intéressant de voir comment cette notion peut être généralisée à d'autres contextes.

DÉFINITION 2.1. Une *métrique* sur un ensemble X consiste en une application

$$\begin{array}{rccc} d : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,x') & \longmapsto & d(x,x') \end{array}$$

telle que

(M1) Non-dégénérescence : $d(x,x') = 0$ si et seulement si $x = x'$;

(M2) Symétrie : $d(x,x') = d(x',x)$ pour tous $x,x' \in X$;

(M3) Inégalité triangulaire : $d(x,x') \leq d(x,x'') + d(x'',x')$ pour tous $x,x',x'' \in X$.

Le couple (X,d) est alors appelé un *espace métrique*.

Les conditions (M1) à (M3) qu'on appelait au début des "propriétés importantes" quand on parlait des distances euclidiennes, on va maintenant les appeler des *axiomes* qui régissent la métrique.

Montrons maintenant que cette généralisation de la métrique correspond toujours à notre intuition, avec une distance qui reste toujours positive.

LEMME 2.2. *Si (X,d) est un espace métrique, alors $d(x,x') \geq 0$ pour tous $x,x' \in X$.*

DÉMONSTRATION. On a

$$0 \overset{(M1)}{=} d(x,x) \overset{(M3)}{\leq} d(x,x') + d(x',x) \overset{(M2)}{=} 2d(x,x').$$

□

DÉFINITION 2.3. Un espace métrique (x,d) est *borné* s'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $d(x,x') \leq M$ pour tous $x, x' \in X$.

EXEMPLE 2.4. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors

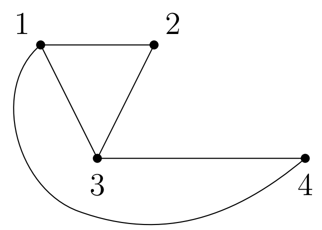
$$\begin{array}{rcccl} d_{\langle \cdot,\cdot \rangle} & : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (v,w) & \longmapsto & \|v-w\| = \langle v-w, v-w \rangle^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

est une métrique sur V.

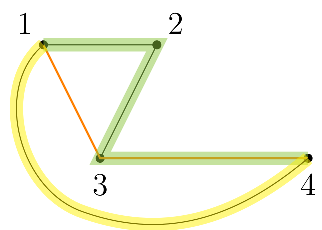
EXEMPLE 2.5. **La métrique chemin.** Soit $G = (V,E)$ un graphe *simple*, c'est-à-dire

- V est un ensemble, dont les éléments sont appelés les *sommets* de G ;
- E est un ensemble de sous-ensembles de V de cardinalité 2, dont les éléments sont appelés les *arêtes* de G.

Par exemple, avec $V = \{1,2,3,4\}$ et $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{3,4\}\}$, on peut se représenter la situation comme suit :



On pourrait être tenté de définir la distance entre deux points comme le nombre d'arêtes qu'il faut parcourir pour passer de l'un à l'autre. Mais un problème apparaît rapidement : entre certains points, plusieurs chemins différents existent. Par exemple, pour aller du point 1 au point 4, on peut suivre trois trajets distincts. Alors, lequel choisir ?



Étant donnée $v, w \in V$, un *chemin* de v à w consiste en une suite $(v_0, \dots, v_n)$ de sommets telle que $v_0 = v_1$ et $v_n = w$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$.
On va alors définir la *métrique chemin* sur V déterminée par G pour tous $v, w \in V$ par

$$d_G(v,w) = \min \{n \mid \text{ il existe un chemin } (v_0, \dots, v_n) \text{ de } v \text{ à } w\}.$$

Exemple 2.6. **La distance de Hamming.** Soit A un ensemble, que l'on va appeler notre "alphabet". Si $n \geq 0$ est un nombre naturel, posons

$$W_n(A) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A\}$$

l'ensemble des mots de longueur n dans l'alphabet A. Alors la *métrique de Hamming* sur $W_n(A)$ est définie par

$$\begin{array}{rccl} d_H : & W_n(A) \times W_n(A) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & \#\{i \mid a_i \neq b_i\} \end{array}$$

il s'agit donc du nombre de composantes distinctes entre a et b.
La distance de Hamming est très importante d'un point de vue pratique, notamment pour ses liens avec la théorie des codes correcteurs d'erreurs, qui permettent de détecter et corriger des erreurs dans les transmissions de données.

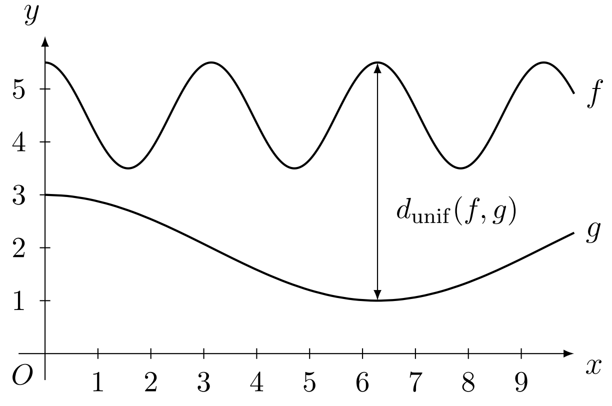
Exemple 2.7. **La métrique uniforme.** Soient (X,d) un espace métrique et W autre ensemble. Posons

$$\mathcal{F}(W,X) = \{f : W \longrightarrow X \mid f \text{ est une application}\}.$$

Si (X,d) est borné, alors la *métrique uniforme* définie par

$$d_{\text{unif}}(f,g) = \sup_{w \in W} d(f(w), g(w))$$

existe. Pour les fonctions f et g suivantes, on peut se représenter la situation comme suit :



Remarque 2.8. Dans les exemples 2.4 (pour k fini et $\dim(V) < \infty$), 2.5 (pour $\#V < \infty$), 2.6 (pour $\#A < \infty$), et 2.7 (pour $\#W, \#X < \infty$) fournissent des exemples d'espaces métriques *finis*, qui sont très importants pour des applications pratiques.
De plus, si (X, d) est un espace métrique fini où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on peut lui associer une matrice

$$M(d) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad \text{où} \qquad M(d)_{ij} = d(i,j)$$

c'est-à-dire, plus explicitement :

$$M(d) = \begin{pmatrix} d(1,1) & \cdots & d(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d(n,1) & \cdots & d(n,n) \end{pmatrix}$$

La matrice ainsi obtenue est symétrique par (M2) et la diagonale $M(d)_{ii} = 0$ pour tout i par (M1).

Remarque 2.9. Les exemples 2.6 et 2.7 illustrent bien l'idée d'une métrique comme une mesure de *similitude* ou de *ressemblance*.

3. Constructions d'espaces métriques

Maintenant que nous avons vu quelques exemples, nous pouvons nous demander comment construire un espace métrique à partir d'autres espaces métriques donnés.

3.1. Sous-espaces métriques.

Dans la théorie des ensembles, à partir d'un ensemble X donné, il est possible de définir un sous-ensemble Y ne contenant que certains éléments de X. De manière analogue, en théorie des groupes, on peut définir un sous-groupe $(H, *)$ à partir d'un groupe plus vaste $(G, *)$, en choisissant des éléments qui respectent les propriétés du groupe. Notre but maintenant est de faire pareil avec les espaces métriques.

Définition 3.1. Soient (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$, un sous-ensemble de X. Si on pose

$$\begin{array}{rcrcl} d_Y = d|_{Y\times Y} & : & Y \times Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (y, y') & \longmapsto & d(y, y') \end{array}$$

alors (Y, d_Y) est appelé le *sous-espace métrique déterminé par Y*.

Avec cette définition, il n'est pas difficile de démontrer le Lemme suivant.

LEMME 3.2. *Si (X, d) est un espace métrique, alors le sous-espace métrique (Y, d_Y) est bien un espace métrique.*

EXEMPLE 3.3. Si on pose $X = \mathbb{R}^2$ et $Y = S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ les deux munis de la distance euclidienne, on a que (Y, d_{euc}) est un sous-espace métrique de (X, d_{euc}).

EXEMPLE 3.4. Avec $X = W_n(A)$ où A est l'alphabet latin et

$$Y = \{a_1, \ldots, a_n \in W_n(A) \mid a_1, \ldots, a_n \text{ vrai mot en anglais}\}$$

on a que (Y, d_H) est un sous-espace métrique de (X, d_H).

3.2. Métriques produits.

Lorsque l'on dispose de deux ensembles, on peut les multiplier via le produit cartésien. De même, pour deux groupes, on peut les multiplier à l'aide du produit direct. On souhaite maintenant étendre cette idée aux espaces métriques, en définissant un produit qui permet de multiplier deux espaces métriques tout en conservant leur structure.

Lorsqu'on souhaite considérer une métrique sur $X_1 \times \ldots \times X_n$, au lieu de voir

$$d_\pi : (X_1 \times \ldots \times X_n) \times (X_1 \times \ldots \times X_n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

comme une application partant de deux grands produits de X_1 jusqu'à X_n, on peut le considérer comme n produits de X_i avec lui-même pour tout i. La métrique associée à cet ensemble s'écrit alors $d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n$, mais la distance ainsi obtenue appartient à $\mathbb{R}^n$. Pour obtenir une distance réelle, il faut encore appliquer la norme euclidienne.

$$\begin{tikzcd}
(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (X_1 \times \ldots \times X_n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R} \\
(X_1 \times X_1) \times (X_2 \times X_2) \times \ldots \times (X_n \times X_n) \arrow[d, "d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n"'] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[uur, bend right, "\|\cdot\|_{\text{euc}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce schéma nous motive de définir concrètement la métrique produit en suivant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
((x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)) \arrow[r] \arrow[d] & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, x'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
((x_1, x'_1), (x_2, x'_2), \ldots, (x_n, x'_n)) \arrow[d] & \\
(d_1(x_1, x'_1), d_2(x_2, x'_2), \ldots, d_n(x_n, x'_n)) \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Ce petit préparatif nous permet de poser formellement la définition suivante.

Définition 3.5. Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2), …, (X_n, d_n) des espaces métriques. La *métrique produit sur* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ est

$$\begin{array}{rccl}
d_\pi & : & (X_1 \times \ldots \times X_n) \times (X_1 \times \ldots \times X_n) & \longrightarrow \mathbb{R} \\
& & ((x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)) & \longmapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, x'_i) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{array}$$

Par construction, il est facile à voir que la métrique produit est bien une métrique.

Lemme 3.6. *Si* $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ *sont des espaces métriques, alors le produit des espaces métriques* $(X_1 \times \ldots \times X_n, d_\pi)$ *est bien un espace métrique.*

4. Applications entre espaces métriques

Notre but à présent est de comparer les différents espaces métriques entre eux. Pour cela, on a besoin d'applications qui les relient et qui "préservent" la structure métrique — mais à quel degré ? Et comment le spécifier ? On va découvrir ici quelques possibilités.

Explorons du plus restrictif au plus général. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

4.1. Tout préserver.

Définition 4.1. On dit que f *préserve les distances* si

$$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$$

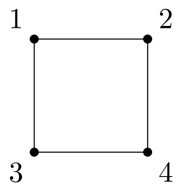
pour tous $x, x' \in X$.

Remarque 4.2. Si f préserve les distances, alors f est injective.

Définition 4.3. On dit que f est une *isométrie* si elle préserve les distances et est surjective (et donc bijective).

Exemple 4.4. Soit $A = \{a, b\}$ et $W_2(A) = \{aa, ab, ba, bb\}$ muni de la distance de Hamming. Considérons encore le graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ muni de la distance chemin.

$G =$



On peut alors remarquer que

$$\#W_2(A) = 4 = \#V$$

et que si on dresse la liste de toutes les distances dans les deux espaces métriques

d_H	aa	ab	ba	bb
aa	0	1	1	2
ab	1	0	2	1
ba	1	2	0	1
bb	2	1	1	0

et

d_{chemin}	1	2	3	4
1	0	1	1	2
2	1	0	2	1
3	1	2	0	1
4	2	1	1	0

alors on voit que les matrices qui décrivent les métriques sont identiques

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, on peut déduire qu'il existe une isométrie $f : W_2(A) \longrightarrow G$ avec

$$f : \begin{cases} aa \longmapsto 1 \\ ab \longmapsto 2 \\ ba \longmapsto 3 \\ bb \longmapsto 4 \end{cases}$$

4.2. Changement d'échelle.

Définition 4.5. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soit encore $K \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est *K-Lipschitz par rapport à d_X et d_Y* si

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K \cdot d_X(x, x')$$

pour tous $x, x' \in X$.

Exemple 4.6. Soit (X, d_X) un espace métrique. Pour tout ensemble W et tout $w_0 \in W$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_{w_0} & : & \mathcal{F}(W, X) & \longrightarrow & X \\ & & f & \longmapsto & f(w_0) \end{array}$$

est 1-Lipschitz par rapport aux métriques d_{unif} et d_X car

$$d_X(f(w_0), g(w_0)) \leq \sup_{w \in W} d_X(f(w), g(w)) = d_{\mathrm{unif}}(f, g).$$

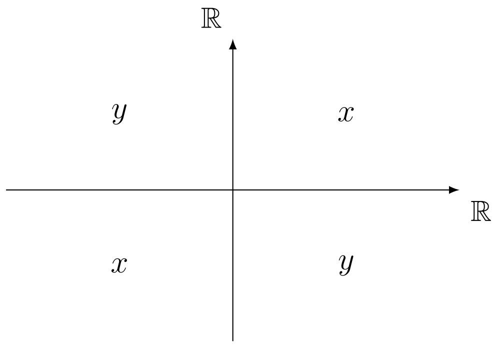
Exemple 4.7. Considérons l'espace métrique $(\{x, y\}, d_{\mathrm{disc}})$ où d_{disc} est la *métrique discrète* dont la matrice qui la représente est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} d_{\mathrm{disc}}(x, x) = 0 = d_{\mathrm{disc}}(y, y) \\ d_{\mathrm{disc}}(x, y) = 1 = d_{\mathrm{disc}}(y, x) \end{cases}$$

Alors l'application

$$\begin{array}{rcccc} f & : & (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{euc}}) & \longrightarrow & (X, d_{\mathrm{disc}}) \\ & & v & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si} \quad v_1 v_2 \geq 0 \\ y & \text{si} \quad v_1 v_2 < 0 \end{cases} \end{array}$$

n'est K-Lipschitz pour aucun K.



4.3. Continuité.

DÉFINITION 4.8. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est *continue par rapport à d_X et d_Y* si pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Comme dans le cas euclidien, il y a une définition équivalente formulée en termes de boules ouvertes.

DÉFINITION 4.9. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r > 0$. La *boule ouverte centrée en x et de rayon r* dans (X, d) est

$$B_d(x, r) = \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}.$$

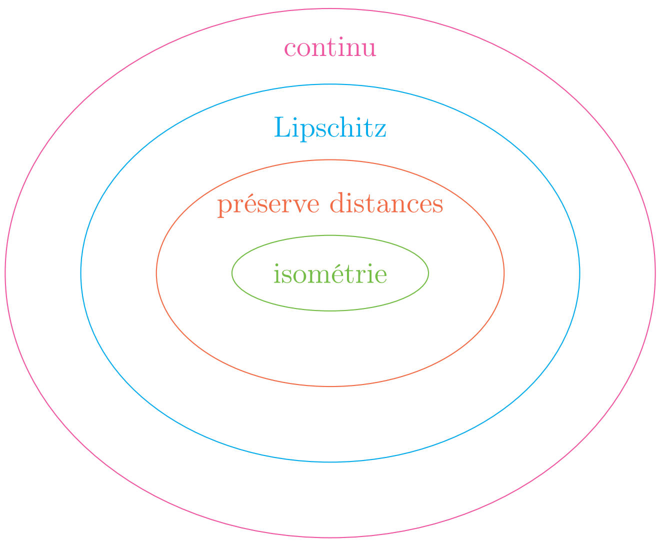
THÉORÈME 4.10. **Caractérisation de la continuité.** *Une application*

$$f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$$

est continue si et seulement si pour tous $y \in Y$, $r > 0$ et $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(y, r))$, il existe un $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(y, r))$.

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue au cas euclidien. □

Pour conclure, on peut représenter les différentes relations parmi ces notions par des diagrammes de Venn.



Chapitre 2

Axiomatique de la topologie

Dans un espace métrique, la continuité exprime que des points proches restent proches par l'application. Or, ce qui compte n'est pas seulement la distance en elle-même, mais aussi la structure de voisinages qu'elle définit. L'axiomatique topologique généralise cette idée afin de parler de continuité sans recourir à une métrique.

1. Les topologies

Dans un espace métrique, la notion fondamentale que nous avons utilisée pour définir la continuité est celle de la boule ouverte. On va maintenant chercher à généraliser cette idée : *qu'est-ce qu'être ouvert ?*

NOTATION 1.1. Pour tout ensemble X, on écrit $\mathcal{P}(X)$ pour l'ensemble des parties de X.

DÉFINITION 1.2. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les trois axiomes suivants :

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(T2) Pour tout $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ pour tout I (même infini) ;

(T3) Pour tout $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}$, on a $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est alors appelé un *espace topologique* et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés des *ouverts* de $(X, \mathcal{T})$.

Une topologie est donc un choix de ce que l'on considère comme ouverts dans un ensemble X.

EXEMPLE 1.3. Tout ensemble X admet les topologies suivantes.

(0) La *topologie grossière* (ou *triviale*) est la plus petite (minimale) topologie sur X

$$\mathcal{T}_{\text{gr}} = \{\emptyset, X\}.$$

(∞) La *topologie discrète* est la topologie maximale sur X

$$\mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X).$$

(1) La *topologie du complément fini* sur X est

$$\mathcal{T}_{\text{comp}} = \{U \subset X \mid \#(X \backslash U) < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Comme cette topologie est moins intuitive que les autres, vérifions qu'elle satisfait bien les trois axiomes.

(T1) : Par définition, $\emptyset \in \mathcal{T}_{\text{comp}}$. De plus, $X \in \mathcal{T}_{\text{comp}}$ car $\#(X \backslash X) = \#\emptyset = 0 < \infty$.

(T2) : Soit $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_{\text{comp}}$. D'après la Loi de De Morgan

$$X \backslash \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \backslash U_i)$$

et comme chaque $X \backslash U_i$ est fini, leur intersection est encore finie, donc

$$\# \left(X \backslash \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \right) = \# \left(\bigcap_{i \in I} \underbrace{(X \backslash U_i)}_{\# < \infty} \right) < \infty.$$

On en déduit que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\text{comp}}$.

(T3) : Soit $\{U_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{T}_{\text{comp}}$. D'après l'autre Loi de De Morgan

$$X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash U_i)$$

et comme chaque $X \backslash U_i$ est fini, leur union finie est encore finie, donc

$$\begin{aligned} \# \left(X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \right) &= \# \left(\bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash U_i) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \#(X \backslash U_i) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_{\text{comp}}$.

Ces trois points montrent que $\mathcal{T}_{\text{comp}}$ est bien une topologie sur X.

On constate ici que la topologie grossière est incluse dans la topologie du complément fini, qui est elle-même contenue dans la topologie discrète. Plus généralement, il est souvent possible de comparer des topologies de cette manière, et il existe une terminologie précise pour décrire ces relations d'inclusion entre topologies — mais il est important de noter qu'une telle comparaison n'est pas toujours possible.

Définition 1.4. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ des topologies sur X. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, on dit que $\mathcal{T}'$ est *plus fine* que $\mathcal{T}$ (ou $\mathcal{T}$ est *plus petite* que $\mathcal{T}'$). Si $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}' \not\subset \mathcal{T}$, alors on dit qu'elles sont *incomparables*.

Cette notion de finesse permet de comparer les topologies en terme de capacité à séparer les points et les ensembles ouverts. Plus une topologie est fine, plus elle contient d'ouverts et plus elle permet de distinguer des sous-ensembles. Inversement, une topologie grossière contient peu d'ouverts et offre moins de distinction entre sous-ensembles.

Exemple 1.5. Dans le cas fini.

(0) Si $X = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ donc la seule topologie possible est

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} = \mathcal{T}_{\text{gr}} = \mathcal{T}_{\text{disc}}.$$

(1) Si $X = \{x\}$ alors $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$ donc la seule topologie possible est

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\} = \mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{T}_{\text{gr}}.$$

(2) Si $X = \{x, y\}$ alors les différentes topologies possibles se résument de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}_{\text{gr}} = \{\emptyset, \{x,y\}\} \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\
\mathcal{T}_x = \{\emptyset, \{x\}, \{x,y\}\} \arrow[dr, hook] & \text{incomparables} \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{T}_y = \{\emptyset, \{y\}, \{x,y\}\} \arrow[dl, hook'] \\
& \mathcal{T}_{\text{disc}} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\} &
\end{tikzcd}$$

où la flèche "$\hookrightarrow$" représente l'inclusion.

(3) Et que se passe-t-il si $\#X = 3$?

On peut rapidement constater que le nombre de topologies possibles sur un ensemble X donné croît très rapidement lorsque la cardinalité $\#X$ augmente. En fait, si $T(n)$ dénote le nombre de topologies sur un ensemble à n éléments, alors

$$T(0) = 1; \quad T(1) = 1; \quad T(2) = 4; \quad T(3) = 29; \quad T(4) = 355; \quad T(5) = 6942; \quad \dots$$

et cette fonction croît plus vite qu'exponentiellement. Il est ainsi naturel de se pencher sur la question suivante.

QUESTION 1.6. Comment pourrait-on spécifier une topologie, sans donner la liste entière de tous les ouverts ?

Une première réponse consiste à introduire la notion suivante.

2. Les bases de topologie

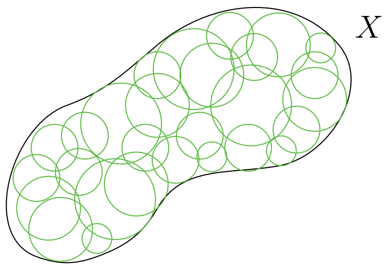
DÉFINITION 2.1. Soit X un ensemble. Une *base de topologie* sur X est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les deux axiomes suivants :

(B1) On a $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

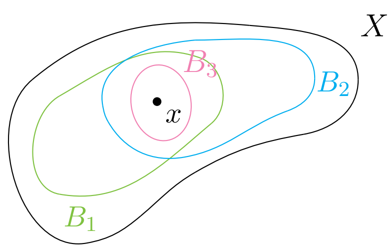
(B2) Pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, on a que pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

L'axiome (B1) est équivalent à dire que pour tout $x \in X$, il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$.

Ces deux axiomes peuvent être illustrés de la manière suivante :



Axiome (B1)



Axiome (B2)

REMARQUE 2.2. Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X, alors $\mathcal{T}$ est aussi une base de topologie. En effet, vérifions les deux axiomes :

(B1) : Par (T1), $X \in \mathcal{T}$ donc $\bigcup_{U \in \mathcal{T}} U = X$;

(B2) : Par (T3), on sait que pour tous $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ on a $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Donc pour tout $x \in U_1 \cap U_2$ on peut poser $U_3 = U_1 \cap U_2$ et on a $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

Inversement, on peut se demander si une base de topologie est elle-même une topologie. La réponse est non en général parce que

— (T1) n'est pas toujours vérifié, car l'ensemble vide n'est pas garanti d'appartenir à une base ;
— (T2) n'est pas forcément satisfaite non plus, car une base ne contient pas nécessairement toutes les unions d'ouverts.

Ce qui manque dans cette définition de base de topologie sont donc les ouverts obtenus par réunions. On va maintenant voir comment, à partir d'une base, on peut ajouter des ouverts pour former toutes les réunions nécessaires afin obtenir une véritable topologie.

LEMME 2.3. **de la topologie engendrée par une base.** *Soit $\mathcal{B}$ une base de topologie sur un ensemble X. Posons*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in U,\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } x \in B \subset U\}.$$

Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est une topologie sur X appelée la topologie engendrée *par $\mathcal{B}$.*

REMARQUE 2.4. La topologie définie ci-dessus est bien égale à l'ensemble de *toutes* les réunions possibles d'éléments de la base $\mathcal{B}$ comme souhaité auparavant, c'est-à-dire :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \,\middle|\, \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

JUSTIFICATION. On procède par le principe de la double inclusion.

($\subset$) : Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Pour chaque $x \in U$, il existe donc un $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \in U$. Ainsi

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

c'est-à-dire que U est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.

($\supset$) : Supposons que $U = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$ avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Alors pour tout $x \in U$, il existe un $B \in \mathcal{A}$ tel que $x \in B \subset U$. Par définition de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ceci implique que $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

On a ainsi l'égalité souhaitée. ✓

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.3. On doit montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ vérifie les trois conditions requises pour être une topologie.

(T1) : Pour l'ensemble vide, si $\emptyset = \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, alors $\bigcup_{B \subset \mathcal{A} = \emptyset} B = \emptyset$ par définition de la réunion d'ensembles. Ainsi, $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Pour l'ensemble X, on sait par (B1) que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ par la Remarque 2.4.

(T2) : Soit $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. On veut montrer que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ un élément. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Puisque $U_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ et cela nous permet de conclure que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(T3) : Soit $\{U_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. On va montrer par récurrence que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

$(n = 1)$: Il est évident que si $U_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, alors $U_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

$(n \Longrightarrow n+1)$: Supposons que c'est vrai pour n et soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} U_i$. Comme

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} U_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap U_{n+1}.$$

on sait à la fois que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ et $x \in U_{n+1}$. Puisque $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ par hypothèse de récurrence et $U_{n+1} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ aussi, il existe $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tels que

$$x \in B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \qquad \text{et} \qquad x \in B_2 \subset U_{n+1}.$$

Cela signifie que $x \in B_1 \cap B_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$. Alors par l'axiome (B2), il existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$$

d'où $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Ainsi, on a montré par récurrence que $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ pour tout $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

La topologie engendrée $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est donc bien une topologie. □

Remarque 2.5. On peut faire les observations suivantes :

(1) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ alors $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$;

(2) On a toujours $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$;

(3) Si $\mathcal{T}$ est une topologie, vue comme base de topologie, alors on a $\mathcal{T}_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ car toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.

Exemple 2.6. Étant donné un ensemble X, alors

(0) L'ensemble $\mathcal{B} = \{X\}$ est une base de la topologie grossière $\mathcal{T}_{\text{gr}}$;

(∞) L'ensemble $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ est une base de la topologie discrète $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.

Lemme 2.7. *Si (X, d) est un espace métrique, alors*

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, r) \mid x \in X \text{ et } r > 0\}$$

est une base de topologie sur X.

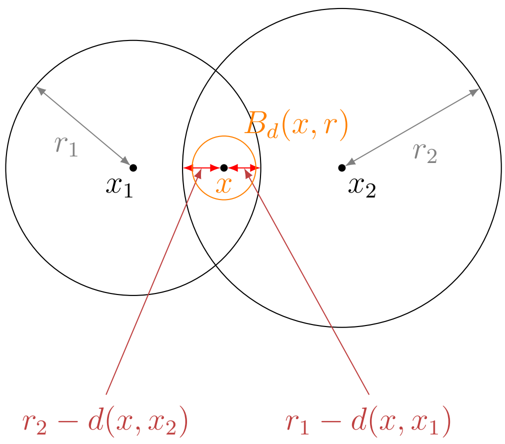
Démonstration. Il faut montrer que $\mathcal{B}_d$ vérifie les deux axiomes pour être une base.

(B1) : On sait que pour tout $x \in X$, on a $x \in B_d(x, r)$ pour $r > 0$ ce qui implique que $X = \bigcup_{x \in X} B_d(x, r)$.

(B2) : Supposons que $B_d(x_1, r_1), B_d(x_2, r_2) \in \mathcal{B}_d$ et montrons que pour tout $x \in B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2)$, il existe un $r > 0$ tel que

$$B_d(x, r) \subset B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2).$$

Illustrons cela avec un schéma.



Soit $r < \min\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\}$. Alors la boule ouverte $B_d(x, r)$ vérifie les propriétés qu'on souhaite. En effet, $x \in B_d(x, r)$, on a aussi $B_d(x, r) \in \mathcal{B}_d$ par définition de $\mathcal{B}_d$ et finalement $B_d(x, r) \subset B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2)$.

Ainsi $\mathcal{B}_d$ est bien une base de la topologie métrique. □

Définition 2.8. La topologie engendrée par $\mathcal{B}_d$, que l'on peut aussi noter $\mathcal{T}_d$ à la place de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$, est appelée la *topologie induite par la métrique d*.

Maintenant que nous avons une bonne idée de ce que sont les bases et qu'on voit qu'elles rendent la description des topologies beaucoup plus simple, on peut se demander s'il est possible de comparer des topologies sans avoir à énumérer tous leurs éléments. Autrement dit, s'il est possible d'utiliser les bases pour déterminer directement si deux topologies sont les mêmes ou si l'une est plus fine que l'autre. Cela nous amène naturellement à la question suivante.

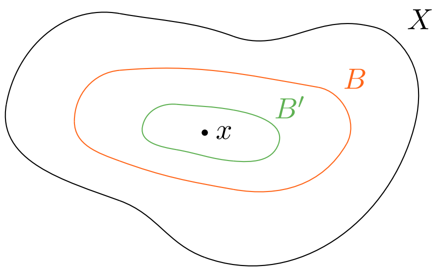
Question 2.9. Comment pourrait-on comparer des topologies induites par deux bases différentes ?

La réponse à cette question est la suivante : il n'est pas toujours possible de comparer directement deux topologies, mais dans certains, on peut le faire.

Lemme 2.10. **de comparaison de bases.** *Soit X un ensemble et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de topologies sur X. Alors*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \iff \forall B \in \mathcal{B},\ \forall x \in B,\ \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tel que } x \in B' \subset B.$$

L'expression à droite du “si et seulement si” peut être représentée ainsi :



Démonstration. Il y a deux implications à montrer.

($\Longrightarrow$) : Puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ et donc pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a que pour tout $x \in B$, il existe un $B' \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B' \subset B$.

($\Longleftarrow$) : Supposons que la condition à droite du “si et seulement si” soit vraie. Alors cela signifie, par définition de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ que $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Autrement dit, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$. Maintenant il faut voir pourquoi est-ce que si la base est contenue dans $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$, alors toute la topologie est contenue dans $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$. Soit donc $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Par la Remarque 2.4, il existe une collection $\{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B}$

telle que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Or, on sait que $B_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ pour tout $i \in I$. Puisque $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ est une topologie, on $U = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ par (T2).

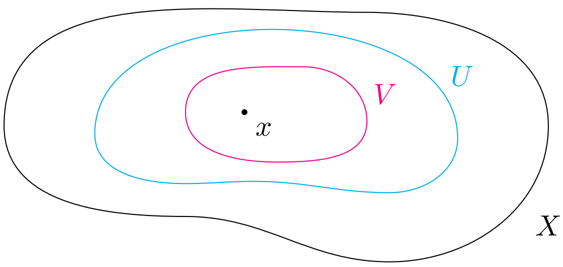
$\square$

Nous venons donc de voir comment comparer deux topologies à partir de leurs bases. Nous pouvons maintenant nous intéresser à la question inverse.

Question 2.11. Comment pourrait-on trouver une base d'une topologie donnée ?

Lemme 2.12. **du test de la base.** *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et soit* $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. *Alors*

$$\mathcal{C} \text{ est une base de topologie et } \mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T} \iff \forall U \in \mathcal{T},\ \forall x \in U,\ \exists C \in \mathcal{C} \text{ tel que } x \in C \subset U.$$



Démonstration. $(\Longrightarrow)$: Par définition de $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, si $\mathcal{C}$ est une base, alors on a la conclusion souhaitée.

$(\Longleftarrow)$: On doit montrer que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{T}$, il faut donc vérifier les deux axiomes suivants.

(B1) : On sait par (T1) que $X \in \mathcal{T}$. Cela implique par hypothèse que pour tout $x \in X$, il existe un $C_{i_x} \in \mathcal{C}$ tel que $x \in C_{i_x} \subset X$. Alors en prenant la collection $\{C_{i_x} \mid x \in X\}$, on a $X = \bigcup_{x \in X} C_{i_x}$.

(B2) : Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$, on a $C_1, C_2 \in \mathcal{T}$ et donc $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{T}$ par l'axiome (T3). Par hypothèse on a alors que pour tout $x \in C_1 \cap C_2$, il existe un $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $x \in C_3 = C_1 \cap C_2$.

Ainsi, on a montré que $\mathcal{C}$ est bien une base de topologie. Il reste encore à montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T}$. On procède par le principe de double inclusion.

($\subset$) : On sait que la topologie engendrée

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \left\{ \bigcup_{i \in I} C_i \mid C_i \in \mathcal{C} \text{ où } I \text{ est quelconque} \right\} \subset \mathcal{T}$$

par (T2) parce que $C_i \in X$ pour tout $i \in I$.

($\supset$) : Considérons un ouvert $U \in \mathcal{T}$. Alors d'après notre hypothèse, pour tout $x \in U$, il existe un C_x tel que $x \in C_x \subset U$. Alors $U = \bigcup_{x \in U} C_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, ce qui montre bien que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.

Ainsi, on conclut que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T}$.

□

3. Les sous-bases de topologie

Nous venons de voir qu'une topologie peut être compliquée à spécifier si l'on doit énumérer tous ses ouverts, mais qu'une base simplifie grandement cette description. Nous allons maintenant explorer une structure encore plus élémentaire, la *sous-base*, qui facilite la spécification d'une base.

Définition 3.1. Soit X un ensemble. Une *sous-base de topologie* sur X est un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$ tel que

(S1) On a $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

Remarque 3.2. On remarque tout de suite que les axiomes (B1) = (S1). Cela signifie qu'une base de topologie $\mathcal{B}$ est toujours une sous-base de topologie.

La raison pour laquelle ces structures sont utiles tient aux axiomes qu'elles doivent satisfaire. Une topologie doit en vérifier *trois*, ce qui peut rendre sa description lourde. En revanche, une base n'a à satisfaire que *deux* axiomes et une sous-base, encore plus simple, ne nécessite de satisfaire qu'*un seul* axiome. Cette hiérarchie montre comment, à chaque étape, on simplifie la spécification de la structure tout en conservant l'ensemble des informations nécessaires :

$$\text{Sous-base} \rightsquigarrow \text{Base} \rightsquigarrow \text{Topologie}. \tag{1}$$

Question 3.3. Comment pourrait-on obtenir une base à partir d'une sous-base ?

De la même manière que le Lemme de la topologie engendrée par une base permet de construire une topologie à partir d'une base, le Lemme de la base engendrée par une sous-base fournit une méthode pour générer une base à partir d'une sous-base.

LEMME 3.4. **de la base engendrée par une sous-base.** *Soient X un ensemble et $\mathcal{S}$ une sous-base de topologie sur X. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \;\middle|\; S_i \subset \mathcal{S} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \right\}$$

est bien une base de topologie.

DÉMONSTRATION. On doit montrer que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ vérifie bien les axiomes d'une base.

(B1) : Comme $\mathcal{S}$ est une sous-base, elle vérifie (S1) = (B1). Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, on peut conclure que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ vérifie (B1).

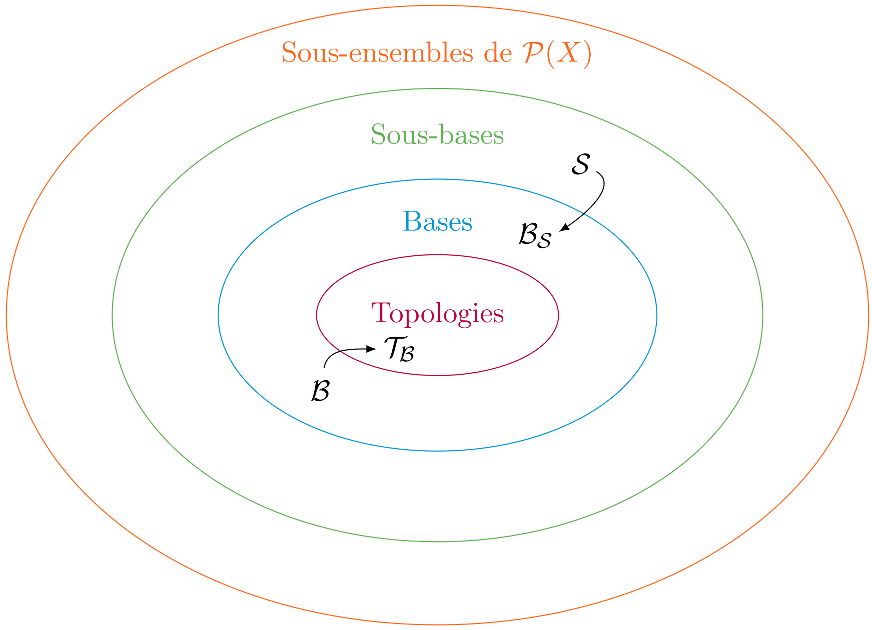
(B2) : Soient $B = \bigcap_{i=1}^{m} S_i$ et $B' = \bigcap_{j=1}^{n} S'_j$ deux éléments de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Alors leur intersection $B \cap B' = \left(\bigcap_{i=1}^{m} S_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} S'_j \right) \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ par définition de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.

Ainsi, $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ est bien une base. □

Ainsi, une sous-base engendre une base et une base peut à son tour générer une topologie ! Ce résultat reflète donc exactement le Schéma (1) qui était la motivation initiale pour introduire ce nouveau concept.

NOTATION 3.5. La topologie engendrée par une base $\mathcal{B}$, elle-même engendrée par une sous-base $\mathcal{S}$, peut se noter $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ si le contexte est clair.

Pour résumer, nous pouvons représenter ces différentes structures par des diagrammes de Venn de la manière suivante.



4. Les applications continues

Nous avons vu les notions fondamentales, notamment les topologies, les bases et les sous-bases. Notre but à présent est d'étudier les applications entre espaces topologiques qui "préservent" leur structure essentielle, c'est-à-dire les ouverts, afin de comparer et de relier différents espaces topologiques.

4.1. Définitions et propriétés.

Définition 4.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Une application

$$f : X \longrightarrow X'$$

est *continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$* si pour tout $U' \in \mathcal{T}'$, on a $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}'$. On écrira alors

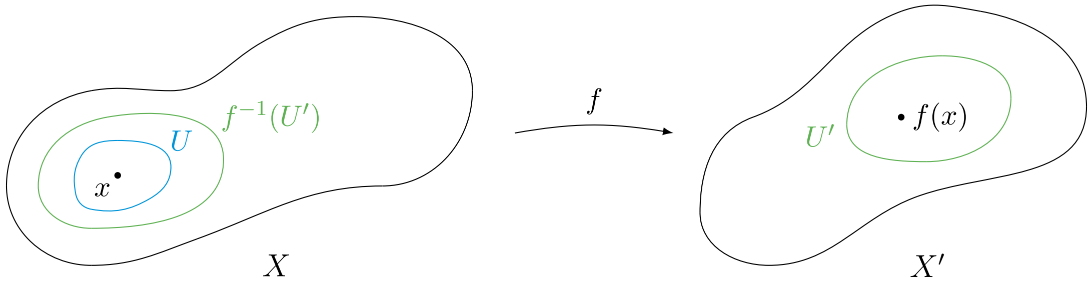
$$\text{“}f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}') \text{ est continue”.}$$

On peut retenir le **slogan** suivant :

$$\boxed{f \text{ est } \textbf{continue} \iff \text{la } \textit{préimage} \text{ d'un } \textbf{ouvert} \text{ est aussi un } \textbf{ouvert}.}$$

Tout comme la continuité standard, il est possible d'énoncer une version locale de cette définition.

Définition 4.2. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Une application $f : X \longrightarrow X'$ est *continue en x par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$* si pour tout $U' \in \mathcal{T}'$ tel que $f(x) \in U'$, il existe un $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset f^{-1}(U')$.



Le Lemme suivant montre que ces définitions s'accordent parfaitement.

Lemme 4.3. *Sous les conditions des définitions ci-dessus, une application $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si f est continue en tout $x \in X$.*

Démonstration. $(\Longrightarrow)$: Soient $x \in X$ et $U' \in \mathcal{T}'$ tel que $f(x) \in U'$. Comme $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue par hypothèse, on a $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ donc on peut poser $U = f^{-1}(U')$ et on aura $x \in U = f^{-1}(U')$, ce qui montre la continuité locale.

$(\Longleftarrow)$: Soit $U' \in \mathcal{T}'$. Pour montrer que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$, on choisit $x \in f^{-1}(U')$, ce qui signifie que $f(x) \in U'$ et alors par hypothèse, il existe un $U_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U_x \subset f^{-1}(U')$. Par conséquent, $f^{-1}(U') = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} U_x \in \mathcal{T}$ par (T2).

$\square$

Par définition, pour montrer qu'une application f est continue, il faut vérifier que la préimage de *chaque* ouvert est un ouvert. Ce n'est pas compliqué en soi, mais cela peut rapidement devenir laborieux pour de grandes topologies. On se rappelle alors que les sous-bases permettent de simplifier la description d'une topologie. Comme une topologie est entièrement déterminée par une sous-base, on peut se demander s'il existe un critère nécessaire et suffisant basé sur cette structure plus élémentaire pour déterminer la continuité de f.

Lemme 4.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Soit $\mathcal{S}'$ une sous-base de $\mathcal{T}'$ (autrement dit $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}'}}$). Alors une application $f : X \longrightarrow X'$ est continue par rapport à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ si et seulement si $f^{-1}(S') \in \mathcal{T}$ pour tout $S' \in \mathcal{S}'$.*

Remarque 4.5. Puisque toute base de topologie est une sous-base par la Remarque 3.2, par ce Lemme, si $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{T}'$, alors $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$ pour tout $B' \in \mathcal{B}'$.

Démonstration du Lemme 4.4. ($\Longrightarrow$) : On a toujours $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}_{\mathcal{S}'} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}'}}$ donc si l'application f est continue, on a nécessairement $f^{-1}(S') \in \mathcal{T}$ pour tout $S' \in \mathcal{S}'$.

($\Longleftarrow$) : Soit $U' \in \mathcal{T}'$. Pour montrer la continuité, on doit montrer que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. On rappelle que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ et que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}'} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S'_i \in \mathcal{S}' \;\middle|\; S'_i \in \mathcal{S}' \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \right\}$$

et

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}'}} = \left\{ \bigcup_{i\in I} B'_i \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}'} \text{ pour tout } i \in I \text{ avec } I \text{ quelconque} \right\}.$$

Comme $U' \in \mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}'}}$, il existe une famille

$$\{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B} \qquad \text{telle que} \qquad U' = \bigcup_{i\in I} B_i$$

et pour chaque $i \in I$, il existe une collection

$$\left\{S'_{i_1}, \ldots, S'_{i_n}\right\} \subset \mathcal{S} \qquad \text{telle que} \qquad B_i = \bigcap_{j=1}^{n} S'_{i_j}.$$

Ainsi

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = \underbrace{\bigcup_{i\in I} \left(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} \underbrace{f^{-1}\left(S'_{i_j}\right)}_{\in \mathcal{T} \text{ par hypothèse}}}_{\in \mathcal{T} \text{ par (T3)}} \right)}_{\in \mathcal{T} \text{ par (T2)}}$$

et on a montré que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ pour tout $U' \in \mathcal{T}'$.

$\square$

Exemple 4.6. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ une application. On veut voir sous quelles conditions, cette application est toujours continue.

(0) *Sous quelle condition sur $\mathcal{T}'$ est-ce que f est toujours continue ?*
Si on pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\text{gr}} = \{\emptyset, X'\}$, alors f est toujours continue, car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ et $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{T}$.

(∞) *Sous quelle condition sur $\mathcal{T}$ est-ce que f est toujours continue ?*
Si on pose $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$, alors f est toujours continue, car pour tout $U' \in \mathcal{T}'$, on a $f^{-1}(U') \subset X$, autrement dit $f^{-1}(U') \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{\text{disc}}$.

(1) L'*application identité*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_X & : & (X,\mathcal{T}) & \longrightarrow & (X,\mathcal{T}') \\ & & x & \longmapsto & x \end{array}$$

est continue si et seulement si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. En effet, Id_X est continue si et seulement si pour tout $U' \in \mathcal{T}'$, on a $\mathrm{Id}_X^{-1}(U') = U' \in \mathcal{T}$.

(2) Cherchons maintenant une application qui est continue pour tout $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. Soit $x'_0 \in X'$. Alors l'*application constante en x'_0*

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{cst}_{x'_0} & : & X & \longrightarrow & X' \\ & & x & \longmapsto & x'_0 \end{array}$$

est toujours continue, car pour tout $U' \in \mathcal{T}'$, on a

$$\mathrm{cst}_{x'_0}^{-1}(U') = \left\{ \begin{array}{lll} \emptyset & \text{si} & x'_0 \notin U' \\ X & \text{si} & x'_0 \in U \end{array} \right. \in \mathcal{T}$$

(d) *Sous quelle condition une fonction continue dans le sens métrique est-elle continue dans le sens topologique, et vice-versa ?*
Ces deux notions sont en fait équivalentes et ceci fait l'objet du Lemme suivant.

Lemme 4.7. *Soient (X,d) et (X',d') des espaces métriques. Une application $f : (X,d) \longrightarrow (X',d')$ est continue (dans le sens métrique) si et seulement si l'application $f : (X,\mathcal{T}_d) \longrightarrow (X',\mathcal{T}_{d'})$ est continue (dans le sens topologique).*

Démonstration. ($\Longrightarrow$) : Supposons que f est continue dans le sens métrique et montrons qu'elle est aussi continue dans le sens topologique. Par la Remarque 4.5, il suffit de montrer que la préimage de tout élément d'une base de $\mathcal{T}'$ appartienne à $\mathcal{T}_d$, c'est-à-dire plus concrètement que

$$f^{-1}\left(B_{d'}(x',r)\right) \in \mathcal{T}_d$$

pour tous $x' \in X'$ et $r > 0$. Par définition de la continuité métrique, on sait que pour tout $x \in f^{-1}\left(B_{d'}(x',r)\right)$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$B_d(x,\delta_x) \subset f^{-1}\left(B_{d'}(x',r)\right)$$

Ainsi, on a

$$f^{-1}(B_{d'}(x',r)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B_{d'}(x',r))} B_d(x,\delta_x) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d} = \mathcal{T}_d$$

par (B2), ce qui montre la continuité topologique de la fonction f.

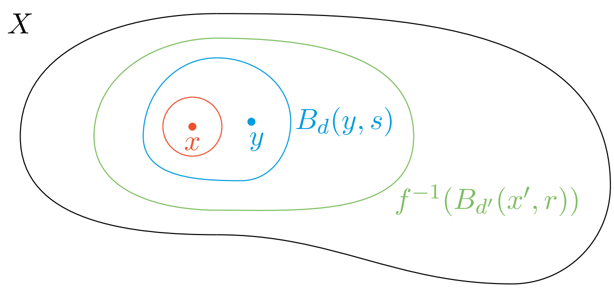
($\Longleftarrow$) : Supposons maintenant que f est continue dans le sens topologique. Pour montrer qu'elle est également continue dans le sens métrique, il faut montrer que pour tout $B_{d'}(x',r) \subset X'$ et $x \in f^{-1}(B_{d'}(x',r))$, il existe un $s > 0$ tel que

$$B_d(x,s) \subset f^{-1}(B_{d'}(x',r)).$$

Or f est topologiquement continue, ce qui implique que

$$f^{-1}(B_{d'}(x',r)) \in \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}.$$

Par définition de la topologie engendrée $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$, on sait que pour tout $x \in f^{-1}(B_{d'}(x',r))$, il existe une boule ouverte $B_d(y,s) \subset X$ telle que $x \in B_d(y,s) \subset f^{-1}(B_{d'}(x',r))$.



Si on pose $t = s - d(x,y)$, alors $B_d(x,t) \subset B_d(y,s) \subset f^{-1}(B_d(x,r))$ et on a ainsi montré la continuité métrique de f.

$\square$

Nous énonçons encore un dernier résultat fondamental avant de passer à la prochaine sous-section.

LEMME 4.8. *Toute composée d'applications continues est continue.*

DÉMONSTRATION. Soient $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$, $(X'',\mathcal{T}'')$ des espaces topologiques et $f : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X',\mathcal{T}')$ et $g : (X',\mathcal{T}') \longrightarrow (X'',\mathcal{T}'')$ deux applications continues.

Soit $U'' \in \mathcal{T}''$ un ouvert. Alors

$$(g \circ f)^{-1}(U'') = \underbrace{f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(U'')}_{\in \mathcal{T}' \text{ car } g \text{ continue}}\right)}_{\in \mathcal{T} \text{ car } f \text{ continue}} \in \mathcal{T}.$$

□

4.2. Homéomorphismes.

En Théorie des groupes ou en Algèbre linéaire, lorsqu'on souhaite comparer des structures entre elles, on relie les deux objets par un isomorphisme, c'est-à-dire une application inversible qui préserve la structure. Nous voulons à présent faire de même pour les espaces topologiques, et cela nous amène à la question suivante.

QUESTION 4.9. Quelle est la bonne notion d'isomorphisme pour les espaces topologiques ?

En Topologie, une propriété fondamentale est la continuité. On souhaite donc définir un "isomorphisme d'espaces topologiques" comme une application continue dont la réciproque est également continue.

DÉFINITION 4.10. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application continue $h : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est un *homéomorphisme* si elle admet une réciproque continue $k : (X', \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ telle que $k \circ h = \mathrm{Id}_X$ et $h \circ k = \mathrm{Id}_{X'}$.

DÉFINITION 4.11. Deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $h : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$. On le note alors $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$.

Les topologues s'intéressent initialement à la classification des espaces topologiques à homéomorphisme près. Autrement dit, ils cherchent à identifier les espaces qui sont "essentiellement les mêmes" du point de vue topologique. Mais qu'est-ce que cela signifie concrètement ?

DÉFINITION 4.12. Une propriété (P) des espaces topologiques est dite *topologique* si elle est préservée par homéomorphisme, c'est-à-dire à chaque fois que $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$ et que $(X, \mathcal{T})$ vérifie cette propriété (P), alors $(X', \mathcal{T}')$ la vérifie également.

Exemple 4.13. Comme un homéomorphisme est une bijection, si un espace est fini, alors tout espace homéomorphe à celui-ci possède le même nombre d'éléments. La propriété : "être fini" est donc une propriété topologique.

De telles propriétés sont utiles pour déterminer rapidement si deux espaces peuvent être homéomorphes, ce qui peut être beaucoup plus simple que de construire explicitement un homéomorphisme entre eux. Parmi ces propriétés, on peut citer la *métrisabilité*, la *compacité* ou la *connexité*, que nous rencontrerons plus tard.

5. Les sous-espaces topologiques

Comme nous travaillons avec des espaces topologiques, il est naturel de se demander si des sous-espaces topologiques existent et, le cas échéant, comment les construire. En théorie des groupes, on chercherait à ce qu'un sous-groupe hérite de la structure du groupe. De manière analogue, en Topologie, comme la notion fondamentale est la continuité, on souhaite que cette propriété soit compatible avec la structure induite sur le sous-ensemble.

Pour cela, soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subset X$. On considère l'inclusion naturelle

$$\iota : Y \hookrightarrow X$$

et cherchons à définir sur Y une topologie qui rend ι continu.

Lemme 5.1. *Si $\mathcal{T}'$ est une topologie sur Y, alors $\iota : (Y, \mathcal{T}') \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si $U \cap Y \in \mathcal{T}'$ pour tout $U \in \mathcal{T}$.*

Démonstration. Pour tout $A \subset X$, on a $\iota^{-1}(A) = A \cap Y$. En particulier, pour que ι soit continue, il faut que $\iota^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{T}'$ pour tout $U \in \mathcal{T}$. □

À partir de ce Lemme, nous déduisons immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 5.2. *La plus petite topologie $\mathcal{T}'$ sur Y telle que $\iota : (Y, \mathcal{T}') \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ soit continue est $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.*

C'est ce Corollaire, aussi trivial qu'il puisse paraître, qui nous permet de poser la définition de sous-espace topologique.

Définition 5.3. Étant donné un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et $Y \subset X$, la *topologie de sous-espace sur Y induite par $\mathcal{T}$* est $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Remarque 5.4. Pour toute application $f : X \longrightarrow X'$, si $Y \subset X$, alors la restriction de f au sous-ensemble Y peut être obtenue à partir de $f|_Y = f \circ \iota$, ce qui peut être visuellement représenté par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] & (X',\mathcal{T}') \\ (Y,\mathcal{T}_Y) \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f|_Y"'] & \end{tikzcd}$$

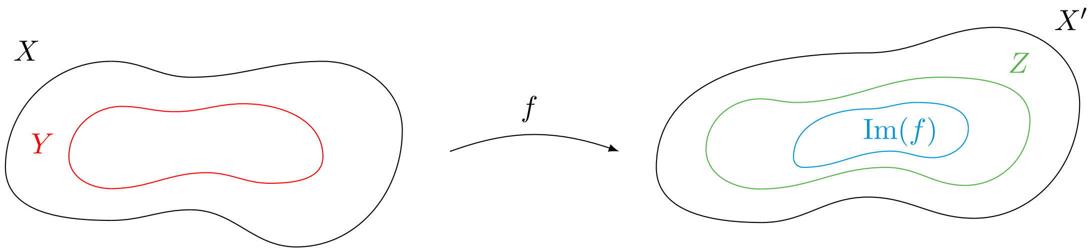
Ces observations nous donnent maintenant une piste pour comprendre la continuité des restrictions.

Lemme 5.5. *Soit $f : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X',\mathcal{T}')$ une application entre espaces topologiques. Considérons encore des sous-ensembles $Y \subset X$ et $Z \subset X'$ tel que* $\mathrm{Im}(f) \subset Z$*. Si f est continue, alors*

(1) la restriction $f|_Y : (Y,\mathcal{T}_Y) \longrightarrow (X',\mathcal{T}')$ est continue ;

(2) la co-restriction $f|^Z : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (Z,\mathcal{T}'_Z)$ est continue.

On peut se représenter la situation ainsi :



Démonstration. (1) Par la Remarque 5.4, on sait que $f|_Y = f \circ \iota$:

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] & (X',\mathcal{T}') \\ (Y,\mathcal{T}_Y) \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f|_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Puisque f et ι sont les deux continues, leur composée est aussi continue par le Lemme 4.8.

(2) Contrairement à la restriction, la co-restriction n'est pas une composée d'applications, donc il va falloir prouver autrement. Représentons-nous

tout de même la situation à l'aide d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f|^Z"'] & & (X',\mathcal{T}') \\
& (Z,\mathcal{T}'_Z) \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait que $\mathcal{T}'_Z = \{U' \cap Z \mid U' \in \mathcal{T}'\}$. Comme f est continue, on a toujours $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Mais puisque $\mathrm{Im}(f) \subset Z$, on a $f^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U')$. Ainsi

$$\left(f|^Z\right)^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$$

ce qui montre que la co-restriction $f|^Z$ est bien continue.

$\square$

Exemple 5.6. Soit l'application

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Elle est continue par rapport à $\mathcal{T}_{\mathrm{st}} = \mathcal{T}_{d_{\mathrm{euc}}}$. Alors comme $f(x) = x^2 \geq 0$, la co-restriction

$$\begin{array}{rcccc} f|^{\mathbb{R}_{\geq 0}} & : & (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathrm{st}}) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}_{\geq 0}, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\right) \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est aussi continue.

Remarque 5.7. Lorsque nous avons abordé les espaces métriques dans le premier chapitre, nous avons vu que, si (X,d) est un espace métrique et $Y \subset X$, on peut définir une métrique induite sur Y simplement par la restriction $d_Y = d|_{Y\times Y}$. Comme toute métrique engendre une topologie, il s'avère que la topologie sur Y induite par d_Y coïncide exactement avec la topologie de sous-espace ! Ce fait peut être illustré par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[r, leftrightarrow] & (X,\mathcal{T}) \\
(Y,d_Y) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u, hook] & (Y,\mathcal{T}_Y) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Le Lemme suivant est fondamental d'un point de vue mathématique, et surtout en Topologie. Intuitivement, il s'agit de prendre un objet complexe, de le **décomposer** en parties simples que l'on comprend bien, puis de **recoller** le tout. On dispose ainsi d'informations *locales* sur différentes parties, et le Lemme permet de les assembler pour obtenir une description *globale*. C'est un outil que l'on utilise très souvent, y compris dans des versions impliquant des fermés (que nous rencontrerons un peu plus loin), et il illustre de manière concrète comment passer du local au global.

LEMME 5.8. **de recollement.** *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow X'$ une application. S'il existe une famille d'ouverts $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ qui recouvre X, c'est-à-dire telle que*

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

et que chaque restriction

$$f|_{U_i} : (U_i, \mathcal{T}_{U_i}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$$

est continue pour tout $i \in I$, alors $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue.

DÉMONSTRATION. Considérons $U' \in \mathcal{T}'$. Alors

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f|_{U_i}^{-1}(U')}_{\substack{\in \mathcal{T}_{U_i} \text{ pour tout } i \in I \\ \text{par hypothèse}}}$$

car $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc pour tout $i \in I$, il existe un ouvert $V_i \in \mathcal{T}$ tel que $f|_{U_i}^{-1}(U') = V_i \cap U_i$ par la définition 5.3 d'un sous-espace topologique sur $\mathcal{T}_{U_i}$. Ainsi, on a

$$f^{-1}(U') = \underbrace{\bigcup_{i \in I} \underbrace{(V_i \cap U_i)}_{\in \mathcal{T} \text{ par (T3)}}}_{\in \mathcal{T} \text{ par (T2)}} \in \mathcal{T}$$

ce qui montre que f est bien continue. □

EXEMPLE 5.9. Posons $X =]-2, -1[\cup]1; 2[\subset \mathbb{R}$. On munit X de sa topologie standard et on considère donc $(X, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_X)$. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}}) \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } \ -2 < x < -1 \\ e^x & \text{si } \quad 1 < x < 2 \end{cases} \end{array}$$

Si on pose

$$U_1 =]-2; -1[\qquad \text{et} \qquad U_2 =]1; 2[$$

alors $X = U_1 \cup U_2$ et les restrictions

$$f|_{U_1}(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad f|_{U_2}(x) = e^x$$

sont chacune continues. On peut alors conclure, par le Lemme de recollement, que f est continue.

6. Autour de la notion de fermé

Après avoir exploré les ouverts, on va maintenant se tourner vers les ensembles dits *fermés*. Cette nouvelle notion n'offrira non seulement une perspective complémentaire sur ce qu'on a étudié jusqu'à maintenant, mais jouera aussi un rôle fondamental dans la structure topologique d'un espace.

DÉFINITION 6.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $C \subset X$ est *fermé* par rapport à $\mathcal{T}$ s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ tel que $C = X \backslash U$.

Si on se fie à la littérature, un ensemble fermé pourrait sembler simplement "non ouvert". En Topologie, la notion est plus subtile : certains sous-ensembles peuvent être à la fois ouverts *et* fermés (appelés *clopen* en anglais). Il est donc important de ne pas confondre fermé avec le simple contraire d'ouvert, car cela peut être faux, comme le montrent les exemples suivants.

EXEMPLE 6.2. Soit X un ensemble.

(0) Dans $(X, \mathcal{T}_{\text{gr}})$, les sous-ensembles $\emptyset$ et X sont les deux ouverts et fermés, parce que $\emptyset = X \backslash X$ et $X = X \backslash \emptyset$.
En fait, ce fait reste vrai dans toute topologie $\mathcal{T}$ définie sur X.

(∞) Dans $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$, tout sous-ensemble de X est fermé par rapport $\mathcal{T}_{\text{disc}}$. En effet, pour tout $A \subset X$, on peut exprimer $A = X \backslash (X \backslash A))$ et on sait que $X \backslash A \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{\text{disc}}$.

Comme les notions d'ouverts et de fermés sont intimement liées, certaines propriétés des ensembles fermés peuvent être directement déduites à partir des axiomes de topologie (T1) à (T3).

PROPOSITION 6.3. **Propriétés élémentaires des fermés.** *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Alors*

(F1) $\emptyset, X$ *sont fermés par rapport à* $\mathcal{T}$ *;*

(F2) *Toute intersection de fermés est fermée ;*

(F3) *Toute réunion* finie *de fermés est fermée.*

Démonstration. Ces propriétés découlent immédiatement des axiomes (T1) à (T3). □

Ces propriétés élémentaires des fermés seront utiles pour analyser plus finement la relation entre un sous-ensemble et les ouverts et fermés qui l'entourent. On souhaiterait en effet approximer un sous-ensemble $A \subset X$ quelconque par un ouvert ou par un fermé.

Question 6.4. Comment pourrait-on trouver l'ouvert et le fermé les "plus proches" d'un sous-ensemble $A \subset X$ quelconque ?

Commençons par définir rigoureusement ce que l'on entend par ouvert et fermé les "plus proches".

Définition 6.5. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble. Alors

(1) l'*adhérence* de A (par rapport à $\mathcal{T}$) est

$$\overline{A} = \bigcap_{\{C \mid C \text{ fermé et } A \subset C\}} C;$$

(2) l'*intérieur* de A (par rapport à $\mathcal{T}$) est

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{\{U \mid U \in \mathcal{T} \text{ et } U \subset A\}} U.$$

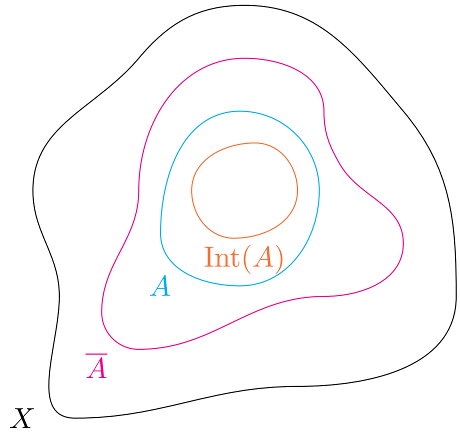
Ces définitions, qui peuvent sembler abstraites à première vue, se reformulent facilement à l'aide des **slogans** suivants :

Le **fermé** $\overline{A}$ qui approxime le mieux A $\leftrightsquigarrow$ le plus *petit* **fermé** qui *contient* A

et

L'**ouvert** $\mathrm{Int}(A)$ qui approxime le mieux A $\leftrightsquigarrow$ le plus *grand* **ouvert** qui est *contenu dans* A

et on peut se souvenir des figures suivantes :



Remarque 6.6. On a toujours les inclusions

$$\underbrace{\mathrm{Int}(A)}_{\text{ouvert}} \subset A \subset \underbrace{\overline{A}}_{\text{fermé}}$$

"$=$" si A ouvert   "$=$" si A fermé

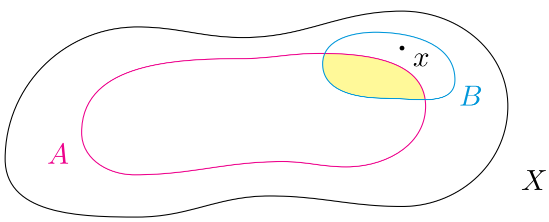
Théorème 6.7. **Caractérisation de l'adhérence.** *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathcal{T}$. *Alors pour tout* $A \subset X$,

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{si } B \in \mathcal{B} \text{ et } x \in B, \text{ alors } A \cap B \neq \emptyset\}.$$

L'idée centrale de ce Théorème se formule par le **slogan** :

$x \in \overline{A} \iff$ Pour tout **voisinage** de x, il existe *au moins un point* de A dans ce **voisinage**

et on peut se représenter la situation ainsi :



Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A} &\iff \forall C \text{ fermé tel que } A \subset C, \text{ on a } x \in C \\
&\iff \forall U \in \mathcal{T} \text{ tel que } A \subset X \backslash U, \text{ on a } x \in X \backslash U \\
&\iff \forall U \in \mathcal{T} \text{ tel que } A \cap U = \emptyset, \text{ on a } x \notin U \\
&\iff \text{Si } U \in \mathcal{T} \text{ vérifie } x \in U, \text{ alors } A \cap U \neq \emptyset
\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{si } U \in \mathcal{T} \text{ vérifie } x \in U, \text{ alors } A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Pour réduire à la base $\mathcal{B}$, on se rappelle que

$$U \in \mathcal{T} \iff \exists \{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B} \text{ tel que } U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Donc pour un élément x dans U :

$$x \in U \iff \text{il existe } i \text{ tel que } x \in B_i$$

par l'axiome (B1) et

$$A \cap U \neq \emptyset \iff \text{il existe } j \text{ tel que } A \cap B_j \neq \emptyset.$$

$\square$

THÉORÈME 6.8. **Caractérisation de la continuité.** *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *et* $(X', \mathcal{T}')$ *des espaces topologiques. Soit* $f : X \longrightarrow X'$ *une application. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ *est continue ;*
(2) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ *pour tout* $A \subset X$ *;*
(3) Pour tout $C' \subset X'$ *fermée par rapport à* $\mathcal{T}'$*, sa préimage* $f^{-1}(C')$ *est fermé par rapport à* $\mathcal{T}$*.*

DÉMONSTRATION. Pour montrer ces équivalences, on va démontrer que

$$(1) \implies (2); \qquad (2) \implies (3); \qquad (3) \implies (1).$$

$(1) \implies (2)$: Supposons que f est topologiquement continue et soit $x' \in f(\overline{A})$. Alors, il existe un $x \in \overline{A}$ tel que $x' = f(x)$. Par la caractérisation de l'adhérence, pour tout $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, on a

$$U \cap A \neq \emptyset. \tag{2}$$

Pour montrer que $x' \in \overline{f(A)}$ aussi, on doit montrer que pour tout $U' \in \mathcal{T}'$ tel que $x' \in U'$, on a $U' \cap f(A) \neq \emptyset$.
Or, par continuité de f, si $U' \in \mathcal{T}'$, alors $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. De plus, comme $f(x) = x'$, on sait que $x \in f^{-1}(U')$. Mais par (2), on a $A \cap f^{-1}(U') \neq \emptyset$, ce qui implique, en appliquant f de part et d'autre, que

$$\emptyset \neq f\big(A \cap f^{-1}(U')\big) = f(A) \cap f\big(f^{-1}(U')\big) \subset f(A) \cap U'.$$

d'où $x' \in \overline{f(A)}$. On a ainsi montré que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Soit $A' \subset X'$ un sous-ensemble fermé par rapport à $\mathcal{T}'$. Alors

$$f^{-1}(A') \subset \overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}\Big(f\Big(\overline{f^{-1}(A')}\Big)\Big) \overset{(2)}{\subset} f^{-1}\left(\underbrace{\overline{f(f^{-1}(A'))}}_{\subset A'}\right) \subset f^{-1}\big(\overline{A'}\big) = f^{-1}(A').$$

Par analogie avec le principe des deux gendarmes, on a $f^{-1}(A') = \overline{f^{-1}(A')}$, donc $f^{-1}(A')$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Soit $U' \in \mathcal{T}'$ un ouvert. Posons $C' = X \backslash U'$, il est donc fermé par rapport à $\mathcal{T}'$. Alors par hypothèse, $f^{-1}(C')$ est aussi fermé par rapport $\mathcal{T}$. Or

$$f^{-1}(C') = f^{-1}(X' \backslash U') = X \backslash f^{-1}(U') \iff f^{-1}(U') = X \backslash f^{-1}(C')$$

donc $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ est un ouvert puisque $f^{-1}(C')$ est fermé.

Ainsi, les trois affirmations sont équivalentes. □

Lemme 6.9. **de recollement (version fermés).** *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow X'$ une application. S'il existe une famille de fermés $\{C_1, \ldots, C_n\}$ qui recouvre X, c'est-à-dire telle que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = X$$

et que chaque restriction

$$f|_{C_i} : (C_i, \mathcal{T}_{C_i}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$$

est continue pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue.

Démonstration. Pour montrer que chaque restriction $f|_{C_i}$ est continue, par le Théorème 6.8 de la caractérisation de la continuité, il faut montrer que si $C' \subset X'$ est fermé, alors $f^{-1}(C')$ est aussi fermé. On observe que

$$f^{-1}(C') = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap f^{-1}(C') = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{f|_{C_i}(C')}_{\text{fermé } \forall i}}_{\text{fermé par (F3)}}$$

et ainsi $f^{-1}(C')$ est fermé. □

7. La compacité

Nous sommes à présent prêts à aborder un nouvel aspect de ce chapitre : la notion de *compacité*. Nous avons déjà rencontré, en Analyse l'année passée, la notion d'*ensemble compact* à travers le Théorème de Heine–Borel. Nous allons rappeler son énoncé pour motiver la définition générale de la compacité que nous adopterons en Topologie.

THÉORÈME 7.1. **de Heine–Borel.** *Pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour tout $\{B_{d_{\mathrm{euc}}}(x_i, r_i) \mid i \in I\}$ tel que $A \subset \bigcup_{i\in I} B_{d_{\mathrm{euc}}}(x_i, r_i)$, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{d_{\mathrm{euc}}}(x_{i_k}, r_{i_k})$;

(2) A est fermé et borné.

Cette caractérisation en termes de recouvrements *finis* motive exactement la définition suivante.

DÉFINITION 7.2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un *recouvrement ouvert* de $(X, \mathcal{T})$ est une collection $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ telle que $X = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$. Si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini, on dit que X est *compact*.

Autrement dit, pour un ensemble X quelconque, si $X = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$ où $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ est une collection d'ouverts, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et

$$V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V} \qquad \text{tels que} \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

si X est compact.

Nous allons maintenant voir le lien entre cette notion et celle de sous-espaces topologiques.

REMARQUE 7.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subset X$. Alors Y muni de sa topologie de sous-espace $\mathcal{T}_Y$ est compact si et seulement si à chaque fois qu'on a une collection d'ouverts dans la topologie $\mathcal{T}$ dont la réunion contient Y, alors il existe une réunion *finie* qui contient Y. En symboles mathématiques :

$$(Y, \mathcal{T}_Y) \text{ est compact} \iff \forall\, \mathcal{V} \subset \mathcal{T} \text{ telle que } Y \subset \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V,\ \exists V_1, \ldots, V_n \text{ tels que } Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i.$$

Justification. Par la définition 5.3, la topologie de sous-espace de Y n'est rien d'autre que

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Comme on a aussi

$$Y = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (V \cap Y) = \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) \cap Y = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i \right) \cap Y$$

on obtient bien que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. ✓

On peut ainsi passer d'un "monde" à l'autre sans difficulté. C'est un petit changement de perspective, mais cette nouvelle vision peut s'avérer très utile, notamment lorsqu'on veut parler de sous-espaces.

Mettons cette observation en évidence dans le Lemme suivant.

Lemme 7.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques et $Y \subset X$. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors*

(1) Si Y est fermé par rapport à $\mathcal{T}$, alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est aussi compact ;

(2) Si $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $\big(\mathrm{Im}(f), \mathcal{T}_{\mathrm{Im}(f)}\big)$ est aussi compact.

Pour ce Lemme, les **slogans** qu'il faut retenir sont :

Un sous-espace *fermé* d'un espace **compact** est **compact**

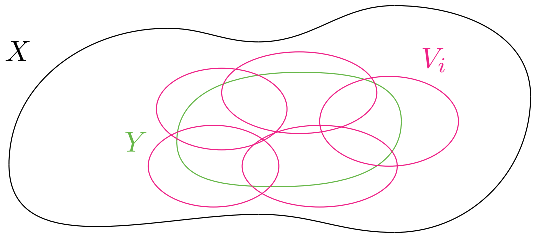
et

L'*image* d'un espace **compact** par une *application continue* est **compact**.

La deuxième est très jolie et se trouve à l'interface de la continuité et de la compacité.

Démonstration. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est compact.

(1) Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ une collection d'ouverts telle que $Y \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. Notre but est de montrer que ce recouvrement est fini.



Comme Y est fermé, le complémentaire $X\backslash Y$ est ouvert par définition. Comme $X = Y \cup (X\backslash Y)$, on observe que $\left(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V\right) \cup (X\backslash Y) = X$. Mais puisque $(X, \mathcal{T})$ est compact par hypothèse, il existe

$$V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V} \qquad \text{tels que} \qquad X = \left(\bigcup_{i=1}^n V_i\right) \cup (X\backslash Y)$$

d'où $Y = Y \cap X = \bigcup_{i=1}^n (V_i \cap Y)$ et donc $Y \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Par la Remarque 7.3, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est bien compact.

(2) Considérons une collection $\mathcal{V}' \subset \mathcal{T}'$ telle que $\mathrm{Im}(f) \subset \bigcup_{V'\in\mathcal{V}'} V'$. Comme f est continue, $f^{-1}(V') \in \mathcal{T}$ pour tout $V' \in \mathcal{V}'$. Mais puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \bigcup_{V'\in\mathcal{V}'} V'$, on sait que $X = \bigcup_{V'\in\mathcal{V}'} f^{-1}(V')$. Or l'espace $(X, \mathcal{T})$ est compact, ce qui signifie qu'il existe

$$V_1', \dots, V_n' \in \mathcal{V}' \qquad \text{tels que} \qquad X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_i').$$

Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{i=1}^n f\big(f^{-1}(V_i')\big) \subset \bigcup_{i=1}^n V_i'.$$

□

Nous voulons maintenant donner une caractérisation de la compacité. Mais pour y parvenir, il nous faut introduire la notion suivante, qui peut sembler étrange à première vue, mais qui s'avère très utile.

DÉFINITION 7.5. Soient X un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. La collection $\mathcal{C}$ vérifie la *propriété d'intersection finie* (PIF) si pour tout $\{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathcal{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$

Énonçons maintenant la caractérisation en termes de cette propriété. Elle peut sembler un peu difficile à saisir, mais elle se révèle très utile pour établir la compacité sous certaines conditions.

Théorème 7.6. **Caractérisation de la compacité.** *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Alors* $(X, \mathcal{T})$ *est compact si et seulement si, si* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ *vérifie la* (PIF) *et* C *est fermée par rapport à* $\mathcal{T}$ *pour tout* $C \in \mathcal{C}$*, alors* $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

Démonstration. $(\Longrightarrow)$: *Par l'absurde.* Supposons que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifie la (PIF) et que $C \in \mathcal{C}$ est fermé pour tout $C \in \mathcal{C}$. Supposons par l'absurde que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$. Alors on aurait

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \underbrace{(X \backslash C)}_{\in \mathcal{T} \text{ car } C \text{ fermé}} = X \backslash \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = X$$

donc $\{X \backslash C \mid C \in \mathcal{C}\}$ serait un recouvrement ouvert de X. Or, $(X, \mathcal{T})$ est compact, donc il existerait

$$C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \qquad \text{tels que} \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash C_i).$$

Autrement dit : $X = X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ par la Loi de De Morgan, donc $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}$ vérifie la (PIF). $\lightning$

$(\Longleftarrow)$: *Par l'absurde.* Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ un recouvrement ouvert de X, c'est-à-dire $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. Alors

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} (X \backslash V) = X \backslash \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) = \emptyset.$$

Posons $\mathcal{C} = \{X \backslash V \mid V \in \mathcal{V}\}$ où $X \backslash V$ est fermé pour tout $V \in \mathcal{V}$. Si $(X, \mathcal{T})$ n'admettait aucun sous-recouvrement fini, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, si

$$V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V} \qquad \text{alors} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subsetneq X$$

d'où $X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \right) \neq \emptyset$. Comme pour tous $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, il existe

$$V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V} \qquad \text{tels que} \qquad C_i = X \backslash V_i$$

on a par conséquent

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash V_i) = X \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i \right) \neq \emptyset$$

donc $\mathcal{C}$ vérifierait la (PIF). On aurait ainsi $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse sur $\mathcal{V}$. $\lightning$ Ainsi $\mathcal{V}$ admet un sous-recouvrement fini.

$\square$

LEMME 7.7. *La propriété "être compact" est une propriété topologique.*

DÉMONSTRATION. Soit $h : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ un homéomorphisme. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors par le Lemme 7.4, on sait que $\left(\operatorname{Im}(h), \mathcal{T}'_{\operatorname{Im}(h)}\right)$ est aussi compact. Comme h est une bijection, on a $\operatorname{Im}(h) = X'$, et ainsi $(X', \mathcal{T}')$ est également compact. $\square$

On peut noter que dans cette preuve, on a seulement utilisé la continuité et la surjectivité de h. On peut donc faire "plus avec moins", ce qui est toujours une bonne chose dans les périodes de réduction budgétaire.

8. Les espaces produits

Dans cette nouvelle section, nous cherchons à comprendre comment définir de manière naturelle une topologie sur un produit d'espaces topologiques. Nous commencerons par rappeler la construction du produit cartésien dans le cas fini, avant d'y associer la topologie correspondante. Nous étendrons ensuite ces notions au cas infini, ce qui nous conduira à préciser le sens même du produit cartésien et de la topologie produit.

8.1. Préliminaires sur le produit cartésien fini.

NOTATION 8.1. Soient X_1 et X_2 des ensembles. Les *projections* sont les applications

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{pr}_1 : & X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrcl} \mathrm{pr}_2 : & X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_2 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

PROPOSITION 8.2. **Propriétés élémentaires.** *Soient $A_1, B_1 \subset X_1$ et $A_2, B_2 \subset X_2$. Alors, on a*

(1) $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ *;*

(2) $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) \subset (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$ *;*

(3) Si $A_1 \subset X_1$ *et* $A_2 \subset X_2$*, alors*

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{pr}_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2\ ;$$

(4) **Universalité du produit cartésien.** *Soient*

$$f_1 : Y \longrightarrow X_1 \qquad \textit{et} \qquad f_2 : Y \longrightarrow X_2$$

des applications. Alors il existe une unique application continue

$$f = (f_1, f_2) : Y \longrightarrow X_1 \times X_2.$$

telle que

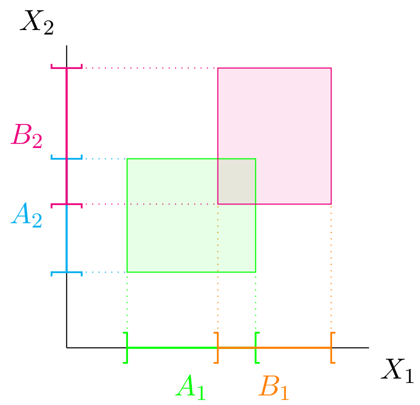
$$\mathrm{pr}_1 \circ (f_1, f_2) = f_1 \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{pr}_2 \circ (f_1, f_2) = f_2.$$

Ces relations peuvent être résumées à l'aide du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \\
Y \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & X_1 \times X_2 \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\
 & & X_2
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soient $A_1, B_1 \subset X_1$ et $A_2, B_2 \subset X_2$.

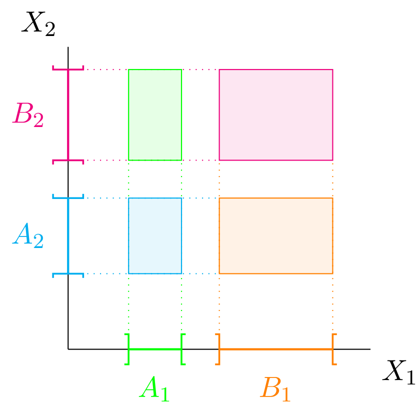
(1) L'égalité devient intuitive si on fait un dessin de la situation en supposant que X_1 et X_2 sont des intervalles :



De manière plus formelle, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2)\in(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2) &\iff (x_1,x_2)\in A_1\times A_2 \text{ et } (x_1,x_2)\in B_1\times B_2\\
&\iff x_1\in A_1,\ x_2\in A_2 \text{ et } x_1\in B_1,\ x_2\in B_2\\
&\iff x_1\in A_1\cap B_1 \text{ et } x_2\in A_2\cap B_2\\
&\iff (x_1,x_2)\in(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)
\end{aligned}$$

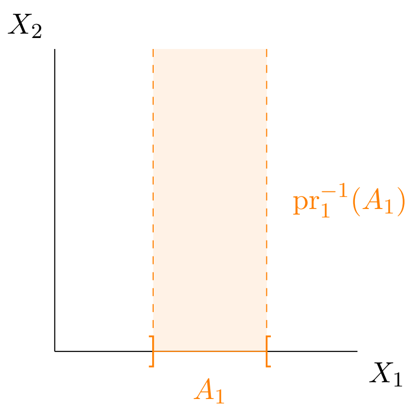
(2) On peut à nouveau se représenter cette situation par le biais d'un croquis :

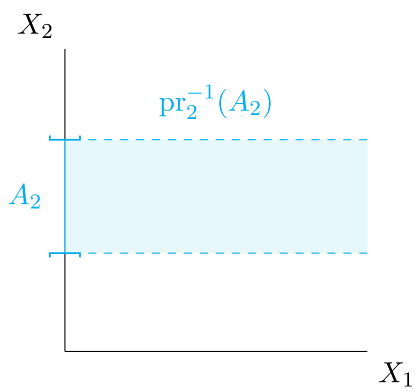


Plus formellement, on a

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2)\in(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2) &\iff (x_1\in A_1 \text{ et } x_2\in A_2) \text{ ou } (x_1\in B_1 \text{ et } x_2\in B_2)\\
&\implies x_1\in A_1\cup B_1 \text{ et } x_2\in A_2\cup B_2
\end{aligned}$$

(3) Ces affirmations sont complètement évidentes par définition des projections. On peut se représenter la situation comme suit :





$\square$

8.2. Produits finis d'espaces topologiques.

On voudrait définir une topologie sur un produit fini d'espaces topologiques. Pour cela, il suffit de se concentrer sur le cas d'un produit de *deux* espaces, parce que le cas d'un produit fini quelconque se traite ensuite par récurrence.

DÉFINITION 8.3. Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. La *topologie produit* sur $X_1 \times X_2$ est la plus petite topologie $\mathcal{T}$ telle que les projections

$$\mathrm{pr}_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$$

soient continues, $\forall i = 1, 2$. On la note $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$.

REMARQUE 8.4. On peut se demander : *pourquoi cette topologie produit existerait ?* Montrons qu'elle est bien définie :

— On sait qu'il existe au moins une topologie telle que pr_i soit continue : la topologie discrète $\mathcal{T}_{\text{disc}}$. Ceci implique que la collection de toutes les topologies qui rendent les projections pr_i continues $\forall i = 1, 2$ n'est pas vide.

— Pour trouver la plus petite topologie, on peut prendre l'intersection de toutes les topologies de cette collection, car si

$$\mathrm{pr}_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}'_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}'_i)$$

sont continues, alors cela signifie que $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ pour tout $U_i \in \mathcal{T}_i$, $\forall i = 1, 2$.

Ainsi, pour trouver $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$, une première approche consisterait à prendre *toutes* les topologies qui rendent *toutes* les projections continues et prendre ensuite leur intersection. Mais cette méthode n'est pas pratique pour *construire* et *comprendre* la topologie. Donc au lieu de se concentrer sur cela, on va construire cette topologie produit à partir d'une sous-base.

LEMME 8.5. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Alors $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est la topologie engendrée par la sous-base*

$$\mathcal{S}_* = \{U_1 \times X_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 \mid U_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

DÉMONSTRATION. On sait que les projections

$$\mathrm{pr}_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$$

sont continues $\forall i = 1,2$ si et seulement si

$$\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T},\ \forall U_i \in \mathcal{T}_i,\ \forall i = 1,2$$

si et seulement si

$$\{U_1 \times X_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 \mid U_2 \in \mathcal{T}_2\} \subset \mathcal{T}.$$

par la Proposition 8.2. Donc en particulier, si $\widetilde{\mathcal{T}}$ est la topologie engendrée par

$$\{U_1 \times X_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 \mid U_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

alors $\widetilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ parce que les projections pr_i sont continues par rapport à $\widetilde{\mathcal{T}}$. De plus, comme pr_i est continue par rapport à $\widetilde{\mathcal{T}}$ et que $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est la plus petite qui vérifie cette condition, on sait aussi que $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \subset \widetilde{\mathcal{T}}$. Ainsi, $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \widetilde{\mathcal{T}}$. □

Corollaire 8.6. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Alors une base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est*

$$\mathcal{B}_* = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ et } U_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

Démonstration. Comme on connaît une sous-base $\mathcal{S}_*$ de la topologie produit par le Lemme 8.5, pour obtenir une base, il faut prendre les intersections de tous ces éléments par le Lemme de la base engendrée par une sous-base. Calculons donc les intersections de

$$U_1 \times X_2, \ldots, U_k \times X_2; \quad X_1 \times V_1, \ldots, X_1 \times V_\ell$$

où $U_i \in \mathcal{T}_1$ et $V_j \in \mathcal{T}_2$ pour tous $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq \ell$. Comme

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{k} (U_i \times X_2) \cap \bigcap_{j=1}^{\ell} (X_1 \times V_j) &= \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i \right) \times X_2 \right) \cap \left(X_1 \times \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} V_j \right) \right) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i \right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} V_j \right) \end{aligned}$$

on en déduit que tout élément de la base $\mathcal{B}_*$ engendrée par la sous-base $\mathcal{S}_*$ est de la forme

$$U \times V \qquad \text{où} \qquad U \in \mathcal{T}_1,\ V \in \mathcal{T}_2.$$

Par ailleurs, pour tout $U \in \mathcal{T}_1$ et $V \in \mathcal{T}_2$, on a

$$(U \times X_2) \cap (X_1 \times V) = U \times V$$

par la Proposition 8.2, donc tout produit $U \times V$ appartient à la base $\mathcal{B}_*$ engendrée par la sous-base $\mathcal{S}_*$. □

Par le Lemme de la topologie engendrée par une base, on peut maintenant déterminer la topologie produit $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ engendrée par $\mathcal{B}_*$.

COROLLAIRE 8.7. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Alors la topologie produit $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est*

$$\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \left\{ \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \;\middle|\; U_i \in \mathcal{T}_1 \text{ et } V_i \in \mathcal{T}_2, \text{ pour tout } i \in I \text{ où } I \text{ est quelconque} \right\}.$$

Nous avons maintenant une bonne compréhension de la topologie produit et savons comment la construire explicitement. Il est maintenant naturel de se demander s'il existe une méthode plus directe ou plus efficace pour en déterminer une base, à partir des bases des topologies de chaque facteur.

COROLLAIRE 8.8. *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ respectivement. Alors*

$$\mathcal{B}_\star = \{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \ \forall i = 1, 2\}$$

est une base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$.

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que $\mathcal{B}_*$ est clairement une base de topologie. Notre but est donc de montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_\star} = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$, où $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_*}$. On va le prouver en utilisant le double inclusion.

($\subset$) : Par comparaison de bases, on voit que

$$\mathcal{B}_\star = \{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \ \forall i = 1, 2\} \subset \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ et } U_2 \in \mathcal{T}_2\} = \mathcal{B}_*.$$

ce qui implique que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_\star} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}_*}$.

($\supset$) : Soient $U \in \mathcal{T}_1$ et $V \in \mathcal{T}_2$ et considérons $(x_1, x_2) \in U \times V$. Comme $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases, il existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ et $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tels que

$$x \in B_1 \subset U \qquad \text{et} \qquad x_2 \in B_2 \subset V$$

et ainsi $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \subset U \times V$. Ainsi, $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{B}_\star$.

Ainsi, par le principe de la double inclusion, on a montré que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_\star} = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$. □

EXEMPLE 8.9. Déterminons ce que donne le produit des topologies grossières et discrètes en appliquant le Corollaire 8.8.

(0) Considérons $(X_1, \mathcal{T}_{\text{gr}})$ et $(X_2, \mathcal{T}_{\text{gr}})$ dont les bases sont respectivement données par

$$\mathcal{B}_1 = \{X_1\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \{X_2\}.$$

Alors une base de $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}} * \mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ est

$$\{\underbrace{\emptyset \times \emptyset, X_1 \times \emptyset, \emptyset \times X_2}_{=\emptyset}, X_1 \times X_2\} = \{\emptyset, X_1 \times X_2\}$$

donc $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}} * \mathcal{T}_{\mathrm{gr}} = \mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ sur $X_1 \times X_2$.

(∞) Considérons $(X_1, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}})$ et $(X_2, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}})$ dont les bases sont respectivement données par

$$\mathcal{B}_1 = \{\{x_1\} \mid x_1 \in X_1\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \{\{x_2\} \mid x_2 \in X_2\}.$$

Alors une base de $\mathcal{T}_{\mathrm{disc}} * \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$ est

$$\{\{x_1\} \times \{x_2\} \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\}$$

donc $\mathcal{T}_{\mathrm{disc}} * \mathcal{T}_{\mathrm{disc}} = \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$ sur $X_1 \times X_2$.

THÉORÈME 8.10. **Propriété universelle de la topologie produit.** *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Soit encore $\mathcal{T}$ une topologie sur $X_1 \times X_2$. Alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ si et seulement si*

(1) les projections

$$\mathrm{pr}_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$$

sont continues $\forall i = 1, 2$; et

(2) pour tout espace topologique $(Y, \mathcal{T}')$ et pour tout $f_i : Y \longrightarrow X_i$, l'application

$$(f_1, f_2) : (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{T})$$

est continue si et seulement si les applications

$$f_i : (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$$

sont continues $\forall i = 1, 2$.

Le **slogan** qu'il faut retenir est

Une application vers un **produit** de deux espaces est *continue* si elle est *continue* dans **chaque facteur**

et on peut se représenter ces applications par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & (X_1, \mathcal{T}_1) \\
(Y, \mathcal{T}') \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\
 & & (X_2, \mathcal{T}_2)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. $(\Longrightarrow)$: Supposons que la topologie $\mathcal{T}$ sur $X_1 \times X_2$ est $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ et montrons que les deux critères sont vérifiés.

(1) Les projections pr_i sont continues par définition de la topologie produit $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$.

(2) Soient $(Y, \mathcal{T}')$ un espace topologique et

$$f_1 : Y \longrightarrow X_1 \qquad \text{et} \qquad f_2 : Y \longrightarrow X_2$$

des applications. Alors on a deux implications à montrer.

$(\Rightarrow)$: Si l'application

$$(f_1, f_2) : (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2)$$

est continue, alors $f_i = \mathrm{pr}_i \circ (f_1, f_2)$ est aussi continue par le Lemme 4.8, puisque c'est une composée d'applications continues.

$(\Leftarrow)$: Supposons que les applications

$$f_i : (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$$

est continue. Alors pour montrer que

$$(f_1, f_2) : (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2)$$

est aussi continue, il suffit de montrer que les préimages des éléments d'une sous-base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ sont des ouverts de $\mathcal{T}_i$ par le Lemme 4.4. On connaît déjà une sous-base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ par le Lemme 8.5. Si on considère

$$U_1 \times X_2 = \mathrm{pr}_1^{-1}(U_1) \qquad \text{où} \qquad U_1 \in \mathcal{T}_1$$

alors

$$(f_1, f_2)^{-1}(U_1 \times X_2) = (f_1, f_2)^{-1}\big(\mathrm{pr}_1^{-1}(U_1)\big) = (\mathrm{pr}_1 \circ (f_1, f_2))^{-1}(U_1) = f_1^{-1}(U_1) \in \mathcal{T}'$$

par la continuité de f_1. De même, si on considère

$$X_1 \times U_2 = \mathrm{pr}_2^{-1}(U_2) \qquad \text{où} \qquad U_2 \in \mathcal{T}_2$$

alors

$$(f_1, f_2)^{-1}(U_2) = (f_1, f_2)^{-1}\big(\mathrm{pr}_2^{-1}(U_2)\big) = (\mathrm{pr}_2 \circ (f_1, f_2))^{-1}(U_2) = f_2^{-1}(U_2) \in \mathcal{T}'$$

par la continuité de f_2. Ainsi, (f_1, f_2) est continue.

($\Longleftarrow$) : *La preuve de cette implication dépasse le cadre ce cours, mais elle est laissée en exercice pour les personnes intéressées.*

$\square$

8.3. Produits cartésiens quelconques.

Nous avons donc réussi à définir et à comprendre le produit topologique pour un nombre fini d'espaces. Pour étendre cette notion aux produits *infinis*, il nous faut adapter la définition du produit cartésien en passant par une version plus abstraite, basée sur des applications.

NOTATION 8.11. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles. On pose le *produit cartésien*

$$\prod(X_1, \ldots, X_n) = \left\{ f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i \;\middle|\; f(i) \in X_i \text{ pour tout } i \right\}.$$

et les *évaluations*

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{ev}_i & : & \prod(X_1, \ldots, X_n) & \longrightarrow & X_i \\ & & f & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

À titre d'illustration, considérons un exemple élémentaire.

EXEMPLE 8.12. Considérons les ensembles

$$X_1 = \{\text{couleurs}\}; \qquad X_2 = \{\text{formes}\}; \qquad X_3 = \{\text{taille}\}.$$

Un élément du produit cartésien "standard" serait un triplet comme par exemple $(\text{vert}, \text{cercle}, \text{petit}) \in X_1 \times X_2 \times X_3$. Si maintenant on considérait notre nouvelle définition, un élément serait une fonction

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{3} X_i$$

où

$$f(1) = \text{vert}; \qquad f(2) = \text{cercle}; \qquad f(3) = \text{petit}$$

par exemple.

On peut se demander si cette nouvelle définition coïncide réellement avec le produit cartésien classique. Le Lemme suivant nous garantit qu'elle reproduit exactement le produit classique lorsque le nombre de facteurs est fini, tout en préservant les coordonnées via les projections.

Lemme 8.13. *Il existe une bijection*

$$\varphi : X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow \prod (X_1, \ldots, X_n)$$

telle que $\mathrm{ev}_i \circ \varphi = \mathrm{pr}_i$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$.

En d'autres termes, ce Lemme nous apprend que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \ldots \times X_n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_i"'] & & \prod (X_1, \ldots, X_n) \arrow[dl, "\mathrm{ev}_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme on veut que $\mathrm{ev}_i \circ \varphi = \mathrm{pr}_i$, on doit définir l'application φ telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, on ait

$$(\mathrm{ev}_i \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

d'où

$$\begin{array}{rcccl} \varphi(x_1, \ldots, x_n) & : & \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \bigcup_{i=1}^{n} X_i \\ & & j & \longmapsto & x_j \end{array}$$

pour tout $1 \leq j \leq n$. Pour voir que c'est une bijection, on observe que l'application

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & \prod (X_1, \ldots, X_n) & \longrightarrow & X_1 \times \ldots \times X_n \\ & & f & \longmapsto & (f(1), \ldots, f(n)) \end{array}$$

est un inverse de φ. $\square$

Cette nouvelle définition du produit cartésien nous permet de l'étendre naturellement au cas d'une famille infinie d'ensembles.

Définition 8.14. Soit $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ une collection d'ensembles. Le *produit cartésien* de la collection $\mathcal{X}$ est

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \;\middle|\; f(i) \in X_i \text{ pour tout } i \in I \right\}.$$

Les *projections* sont

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{pr}_{i_0} & : & \displaystyle\prod_{i\in I} X_i & \longrightarrow & X_{i_0} \\ & & f & \longmapsto & f(i_0) \end{array}$$

pour tout $i_0 \in I$.

Remarque 8.15. Heureusement pour nous, avec cette définition, on peut retrouver les propriétés familières des produits cartésiens finis.

(1) Étant donné des sous-ensembles $A_i \subset X_i$ pour tout $i \in I$, on peut voir le produit cartésien $\prod_{i\in I} A_i$ comme un sous-ensemble de $\prod_{i\in I} X_i$, c'est-à-dire

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f \in \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; f(i) \in A_i \text{ pour tout } i \in I \right\} \subset \prod_{i\in I} X_i.$$

(2) Pour tous $i_0 \in I$ et $A_{i_0} \subset X_{i_0}$, on a

$$\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \prod_{i\in I} A_i \qquad \text{où} \qquad A_i = \begin{cases} A_{i_0} & \text{si } i = i_0 \\ X_i & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$

(3) Pour tous $\{A_i, B_i \subset X_i \mid i \in I\}$, on a

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} (A_i \cap B_i)\,.$$

Comme ce “nouveau” produit cartésien fonctionne de façon entièrement analogue au produit cartésien “classique”, on reprendra les notations habituelles.

Notation 8.16. On (ré)introduit les nouvelles notations suivantes.

(1) Les éléments du produit cartésiens sont notés $\boldsymbol{x} \in \prod_{i\in I} X_i$ et les composantes sont notées $x_i = \boldsymbol{x}(i)$.

(2) Si $X_i = X$ pour tout $i \in I$, alors

$$X^I = \prod_{i\in I} X_i = \{\boldsymbol{x} : I \longrightarrow X \mid \text{où } \boldsymbol{x} \text{ est une application}\}.$$

Théorème 8.17. **Propriété universelle des produits cartésiens.** *Soient $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ une collection d'ensembles et Y un ensemble. Alors, pour tout*

$$\{g_i : Y \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$$

il existe une unique application

$$g : Y \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \qquad \text{où} \qquad g = (g_i)_{i\in I}$$

telle que $\mathrm{pr}_i \circ g = g_i$ *pour tout* $i \in I$.

On peut représenter ces différentes applications à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\exists ! g"] \arrow[dr, "g_{i_0}"'] & & \prod\limits_{i \in I} X_i \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{i_0}"] \\ & X_{i_0} & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme on veut que $\mathrm{pr}_{i_0} \circ g = g_{i_0}$, $\forall i_0 \in I$, on doit avoir

$$g_{i_0}(y) = \mathrm{pr}_{i_0}(g(y)) = (g(y))(i_0)$$

pour tout $y \in Y$ où

$$\begin{array}{rcccl} g(y) & : & I & \longrightarrow & \bigcup\limits_{i \in I} X_i \\ & & i_0 & \longmapsto & g_{i_0}(y) \end{array}$$

Cette application est clairement bien définie. De plus, il s'agit de la seule application qui vérifie $\mathrm{pr}_{i_0} \circ g = g_{i_0}$, $\forall i_0 \in I$. □

8.4. Produits quelconques d'espaces topologiques.

Définition 8.18. Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ une collection d'espaces topologiques. La *topologie produit* sur $\prod\limits_{i \in I} X_i$ est la plus petite topologie $\mathcal{T}$ telle que les projections

$$\mathrm{pr}_{i_0} : \left(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T} \right) \longrightarrow (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0})$$

soient continues, pour tout $i_0 \in I$. On la note $\mathop{*}\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

Remarque 8.19. Comme dans le cas du produit fini, on peut se demander : *pourquoi une telle topologie existerait ?* En fait, l'existence de $\mathop{*}\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ s'établit de manière semblable au cas fini.

On va maintenant donner une caractérisation de la topologie produit par les sous-bases et les bases.

Lemme 8.20. **Caractérisation de la topologie produit.** *Pour toute collection d'espaces topologiques* $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$, *la topologie produit associée* $\mathop{*}\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ *est celle dont une sous-base est*

$$\mathcal{S}_* = \{\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i \text{ et } i \in I\}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est très semblable au cas du produit fini. □

À partir de ce Lemme, on peut facilement trouver une base de la topologie produit.

COROLLAIRE 8.21. *Pour toute collection d'espaces topologiques* $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$, *la topologie produit associée* $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_i$ *est celle dont une base est*

$$\mathcal{B}_* = \left\{ \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{T}_i,\ \forall i \in I \text{ et } \#\{i \mid V_i \neq X_i\} < \infty \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Par le Lemme de la base engendrée par une sous-base, il faut calculer les intersections *finie* des éléments de

$$S_* = \{\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i \text{ et } i \in I\}.$$

On peut calculer

$$\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \cap \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = \prod_{i\in I} V_i$$

et si tous les i_j sont différents, on a

$$V_j = \begin{cases} U_{i_j} & \text{si} \quad i = i_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq k \\ X_i & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\#\{i \mid V_i \neq X_i\} < \infty$. Donc une base de $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_i$ est donnée par

$$\mathcal{B}_* = \left\{ \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{T}_i,\ \forall i \in I \text{ et } \#\{i \mid V_i \neq X_i\} < \infty \right\}$$

ce qui était le résultat souhaité. □

Plus généralement, on obtient le Corollaire suivant, comme pour le cas fini.

COROLLAIRE 8.22. *Si* $\mathcal{B}_i$ *est une base de* $\mathcal{T}_i$ *pour tout* $i \in I$, *alors*

$$\mathcal{B}_\star = \left\{ \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\} \text{ pour tout } i \in I \text{ tel que } \#\{i \mid B_i \neq X_i\} < \infty \right\}$$

est une base de $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_i$.

DÉMONSTRATION. La preuve est semblable au cas d'un produit fini. □

EXEMPLE 8.23. Cherchons à quoi ressemblent les topologies produits quelconques des topologies grossières et discrètes.

(0) Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_{\mathrm{gr}}) \mid i \in I\}$ où I est arbitraire. Alors une base de $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ est

$$\left\{\prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{T}_{\mathrm{gr}} \text{ et } \#\{i \mid V_i \neq X_i\} < \infty\right\}$$

donc les seuls éléments de la base sont

$$\left\{\emptyset, \prod_{i\in I} X_i\right\}$$

donc $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_{\mathrm{gr}} = \mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ sur $\displaystyle\prod_{i\in I} X_i$.

(∞) Soit $\{X_i, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}} \mid i \in I\}$ où I est arbitraire. Une base de $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_i$ est donnée par

$$\left\{\prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{T}_{\mathrm{disc}} \text{ et } \#\{i \mid V_i \neq X_i\} < \infty\right\}$$

et on pourrait s'y attendre à ce que $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_{\mathrm{disc}} = \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$ comme d'habitude, mais cela n'est surprenamment pas toujours le cas ! Cela dépend en fait de si I est fini ou non.

— Si $\#I < \infty$, alors une base de $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$ est

$$\left\{\prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}, \forall i \in I\right\} = \mathcal{P}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)$$

et on a donc $\underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_{\mathrm{disc}} = \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$.

— Si $\#I = \infty$, on choisit des $x_i \in X_i$, $\forall i \in I$ et alors

$$\prod_{i\in I}\{x_i\} \in \mathcal{P}\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \qquad \text{mais} \qquad \prod_{i\in I}\{x_i\} \notin \underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$$

parce qu'on peut avoir au plus un nombre fini de facteurs différents de X_i.

Théorème 8.24. **Propriété universelle de la topologie produit.** *Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ une collection d'espaces topologiques. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur $\displaystyle\prod_{i\in I} X_i$. Alors $\mathcal{T}' = \underset{i\in I}{*}\mathcal{T}_i$ si et seulement si*

(1) les projections

$$\mathrm{pr}_{i_0} : \left(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}'\right) \longrightarrow (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0})$$

sont continues, $\forall i_0 \in I$; et

(2) pour tout

$$\{f_i : Y \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$$

on a

$$f_i : Y \longrightarrow X_i$$

qui est continue $\forall i \in I$ *si et seulement si*

$$(f_i)_{i\in I} : (Y, \mathcal{T}) \longrightarrow \left(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}'\right)$$

est continue.

Démonstration. La preuve est presque identique au cas fini, *mais comme elle dépasse les objectifs du cours, elle est laissée en exercice pour les esprits aventuriers.* □

9. Le Théorème de Tychonoff

Un des grands honneurs pour un mathématicien, au-delà de recevoir la médaille Fields, est de voir un Théorème porter son nom. Le Théorème suivant doit justement son nom au mathématicien Tychonoff et il s'agit d'un des résultats fondateurs de la Topologie.

Théorème 9.1. **de Tychonoff.** *Tout produit d'espaces compacts est compact.*

La preuve de ce Théorème est longue et complexe. L'objectif tout au long de cette section est de la présenter de manière structurée. Pour cela, nous distinguons les cas *fini* et *infini* et introduirons plusieurs Lemmes supplémentaires qui faciliteront la démonstration.

9.1. Preuve dans le cas fini.

On commence la démonstration par une petite observation.

Remarque 9.2. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact. Alors le produit de cet espace avec un singleton muni de la topologie grossière, qui est la seule topologie possible sur un singleton

$$(\{y\} \times X, \{\emptyset, \{y\}\} * \mathcal{T})$$

est également compact.

Justification. Ces deux espaces sont homéomorphes :

$$(X, \mathcal{T}) \cong (\{y\} \times X, \{\emptyset, \{y\}\} * \mathcal{T}).$$

En effet, on peut établir un homéomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{h} & (\{y\} \times X, \{\emptyset, \{y\}\} * \mathcal{T}) & \xrightarrow{k} & (X, \mathcal{T}) \\ x & \longmapsto & (y, x) & \longmapsto & x \end{array}$$

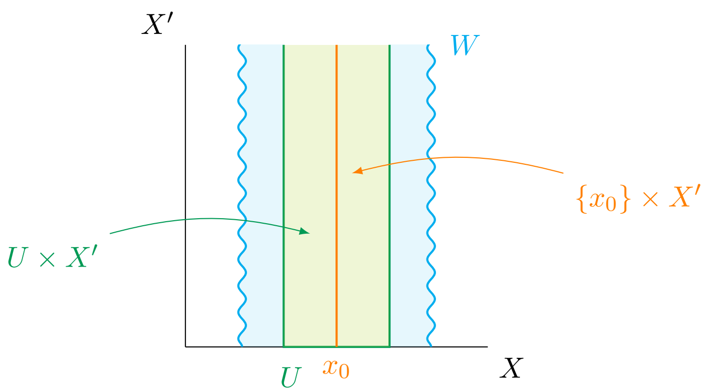
où $k = \mathrm{pr}_2$ et $h = k^{-1} = \mathrm{pr}_2^{-1}$ sont continues. Par le Lemme 7.7, la compacité est une propriété topologique, donc si $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors $(\{y\} \times X, \{\emptyset, \{y\}\} * \mathcal{T})$ l'est aussi. ✓

Lemme 9.3. **du tube.** *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques avec $(X', \mathcal{T}')$ compact. Soit $W \in \mathcal{T} * \mathcal{T}'$. S'il existe un $x_0 \in X$ tel que $\{x_0\} \times X' \subset W$, alors il existe un $U \in \mathcal{T}$ tel que $x_0 \in U$ et $U \times X' \subset W$.*

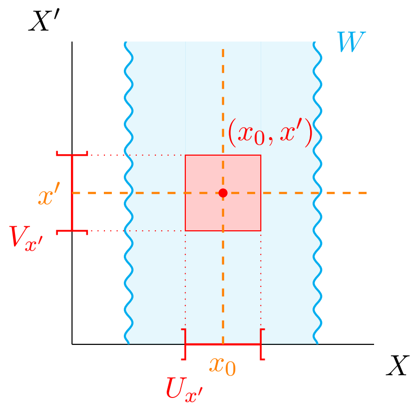
L'intuition qu'il faut avoir est expliquée par le **slogan** :

On peut trouver un **voisinage de** x_0 **dans** X tel que, en le “prolongeant” sur tout X', on **reste dans** W.

et l'illustration du Lemme nous permet de bien comprendre pourquoi il se nomme ainsi :



Démonstration. Pour tout $x' \in X'$, puisque $(x_0, x') \in W$, il existe un élément de la base de $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$ qui contient (x_0, x'), contenu dans W. Autrement dit, il existe $U_{x'} \in \mathcal{T}$ et $V_{x'} \in \mathcal{T}'$ tels que $(x_0, x') \in U_{x'} \times V_{x'} \subset W$.



Comme la collection $\{V_{x'} \mid x' \in X'\}$ est un recouvrement ouvert de $(X', \mathcal{T}')$ et que $(X', \mathcal{T}')$ est compact par hypothèse, on sait qu'il existe

$$x'_1, \ldots, x'_n \qquad \text{tels que} \qquad X' = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x'_i}.$$

Posons $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x'_i} \in \mathcal{T}$. Alors comme $x_0 \in U_{x'}$ pour tout $x' \in X$, on sait que $x_0 \in U$. Pour montrer que $U_{x'} \times X' \subset W$, on observe que si

$$(y, y') \in U_{x'} \times X' = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x'_i} \times \bigcup_{i=1}^{n} V_{x'_i}$$

alors $y \in U_{x'_i}$, $\forall 1 \leq i \leq n$ et il existe j tel que $y' \in V_{x_j}$ avec $1 \leq j \leq n$. En particulier, ceci implique que $(y, y') \in U_{x_j} \times V_{x'_j} \subset W$. $\square$

Les préparatifs sont faits, on peut maintenant prouver le Théorème de Tychonoff dans le cas fini.

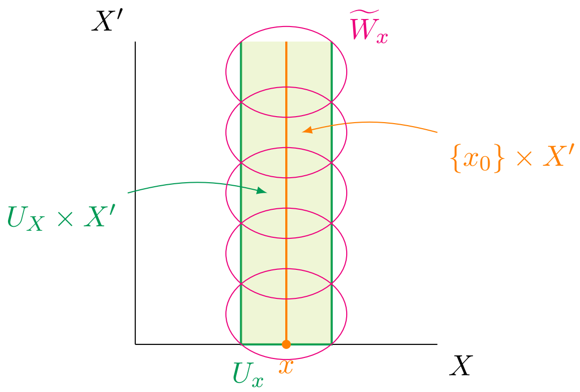
PROPOSITION 9.4. *Tout produit fini d'espaces topologiques compacts est compact.*

DÉMONSTRATION. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(X', \mathcal{T}_{X'})$ des espaces topologiques compacts et considérons un recouvrement ouvert $\bigcup_{i \in I} W_i$ du produit $X \times X'$. On veut alors montrer qu'on peut extraire un sous-recouvrement fini de $X \times X'$. On remarque que pour tout $x \in X$, il existe un recouvrement ouvert fini tel que

$$\{x\} \times X' \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{X \times X'} = \widetilde{W}_x.$$

Par le Lemme du tube, il existe un $U_x \in \mathcal{T}_X$ tel que

$$\{x\} \times X' \subset U_X \times X' \subset \widetilde{W}_x.$$



Mais comme $(X, \mathcal{T}_X)$ est compact et qu'on on a $\bigcup_{x \in X} U_x = X$, on sait qu'il existe

$$U_{x_1}, \ldots, U_{x_m} \qquad \text{tels que} \qquad \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j} = X.$$

Alors

$$X \times X' = \left(\bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j} \right) \times X' = \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j} \times X' \subset \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{W}_{x_j} = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{N_{x_j}} W_{i_{x_j,k}}$$

et ainsi $X \times X'$ admet un sous-recouvrement fini. $\square$

9.2. Preuve dans le cas infini.

De façon étonnante, la preuve dans le cas général s'avère être très différente de celle du cas fini. Afin de l'aborder, nous devons au préalable consolider quelques notions de théorie des ensembles.

Nous commençons par rappeler le résultat suivant sans preuve.

Lemme 9.5. **de Zorn.** *Soit $(A, <)$ un ensemble muni d'un ordre partiel strict. Si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet une borne supérieure dans A, alors A admet un élément maximal, c'est-à-dire qu'il existe un $M \in A$ tel que $M \not< a$ pour tout $a \in A$.*

Lemme 9.6. *Soient X un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de sous-ensembles. Si $\mathcal{A}$ vérifie la* (PIF), *alors il existe un $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que*

(1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$;

(2) $\mathcal{D}$ satisfait la (PIF) *;*

(3) Si $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, alors $\mathcal{E}$ ne vérifie pas la (PIF).

Démonstration. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant la (PIF). Considérons l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \text{ vérifie la (PIF)}\}.$$

Alors si $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ est un sous-ensemble, alors il admet une borne supérieure. En effet, si on pose

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \subset \mathbb{B}} \mathcal{B}$$

alors $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$ par construction. De plus, $\mathcal{C}$ vérifie la (PIF). En effet, toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{C}$ ne fait intervenir qu'un nombre fini d'ensembles provenant de familles $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, et chacune de ces familles satisfait la (PIF) ; ainsi l'intersection reste non vide. Par conséquent, $\mathcal{C} \in \mathbb{A}$ et pour tout $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$; il s'agit donc d'une borne supérieure de $\mathbb{B}$. En appliquant le Lemme de Zorn à l'ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{A}, \subsetneq)$, on sait que $\mathbb{A}$ admet un élément maximal, c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{A}$ maximal par rapport à la (PIF). □

Lemme 9.7. *Soient X un ensemble et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ maximal par rapport à la* (PIF). *Alors*

(1) Si $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{D}$;
(2) Si $A \in \mathcal{P}(X)$ et $A \cap D \neq \emptyset$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, alors $A \in \mathcal{D}$.

Démonstration. Soient X un ensemble et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaisant la (PIF).

(1) On a que
$$\mathcal{D} \cup \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} D_i \right\}$$
aussi satisfait la (PIF), car toute intersection finie d'éléments de cet ensemble reste non vide puisqu'elle est soit une intersection d'éléments de $\mathcal{D}$, soit l'intersection d'un ensemble de $\mathcal{D}$ avec $\bigcap_{i=1}^{n} D_i$, ce qui est non vide, parce que $\mathcal{D}$ satisfait la (PIF). Comme $\mathcal{D}$ est maximal par hypothèse, on a $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{D}$.

(2) On a que $\mathcal{D} \cup \{A\}$ satisfait aussi la (PIF), car $\mathcal{D}$ vérifie la (PIF) et $A \cap D \neq \emptyset$ pour tout $D \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est maximal par hypothèse, on a $\mathcal{D} \cup \{A\} = \mathcal{D}$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{D}$.

□

Nous sommes enfin prêts à aborder la démonstration du Théorème de Tychonoff en toute généralité !

THÉORÈME 9.8. **de Tychonoff.** *Tout produit d'espaces compacts est compact.*

DÉMONSTRATION. Considérons $X = \prod_{i \in I} X_i$ où chaque $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est un espace compact. On veut montrer que $(X, \mathcal{T})$ est aussi compact. Par la caractérisation de la compacité, il suffit de montrer que pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaisant la (PIF), on a $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Supposons donc que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfait la (PIF). Alors par le Lemme 9.6, il existe un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ qui est maximal par rapport à la (PIF) tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Si on pose

$$\mathcal{D}_i = \{\mathrm{pr}_i(D) \mid D \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{P}(X_i)$$

alors chacun des $\mathcal{D}_i$ vérifient la (PIF). Comme X_i est compact, l'intersection

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\mathrm{pr}_i(D)} \neq \emptyset.$$

Soient $x_i \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\mathrm{pr}_i(D)}$ et posons $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$. On veut montrer que $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$. Soit $B \in \underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_i$ un élément de base qui contient $\boldsymbol{x}$. Alors on doit montrer que

$$B \cap D \neq \emptyset, \forall D \in \mathcal{D}$$

car cela impliquera que $\boldsymbol{x} \in \overline{D}$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, autrement dit $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$.
On peut écrire

$$B = \bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{pr}_k^{-1}(U_k) \qquad \text{où} \qquad U_k \in \mathcal{T}_d, \forall k.$$

Alors comme $\boldsymbol{x} \in \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_k)$, on a $x_{i_k} \in U_k$ pour tout k. Mais cela implique que

$$U_k \cap \mathrm{pr}_{i_k}(D) \neq \emptyset \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_k) \cap D \neq \emptyset,\ \forall D \in \mathcal{D}$$

donc $\mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_k) \in \mathcal{D}$ par le Lemme 9.7. Dans ce cas, de nouveau par le même Lemme, on déduit que $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{pr}_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathcal{D}$, ce qui implique que $B \in \mathcal{D}$, donc on conclut que

$$B \cap D \neq \emptyset, \forall D \in \mathcal{D}$$

comme souhaité. $\square$

Chapitre 3

Notions de séparabilité

On cherche maintenant à comprendre jusqu'à quel point un espace permet de distinguer des sous-ensembles disjoints au moyen de voisinages. Les différentes notions de séparation mesurent précisément ces degrés de "séparabilité" et jouent un rôle central pour décrire la finesse et les propriétés structurelles de l'espace.

1. Espaces de Hausdorff

On ouvre ce chapitre en abordant un des exemples les plus fondamentaux où les points peuvent être distingués proprement. En particulier, on voudrait créer une classe d'espaces topologiques où chaque singleton est fermé. On voudrait donc éviter des cas "pathologiques" où des singletons ne sont pas fermés, comme par exemple :

(0) si $\#X > 2$, alors $\{x\}$ n'est pas fermé dans $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{gr}})$;

(1) si $X = \{x, y\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{y\}, X\}$, alors $\{y\}$ n'est pas fermé par rapport à $\mathcal{T}$.

On voudrait aussi avoir un bon contexte pour parler de convergence.

Définition 1.1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *de Hausdorff* si pour tous $x, x' \in X$ avec $x \neq x'$, il existe $U, U' \in \mathcal{T}$ tels que

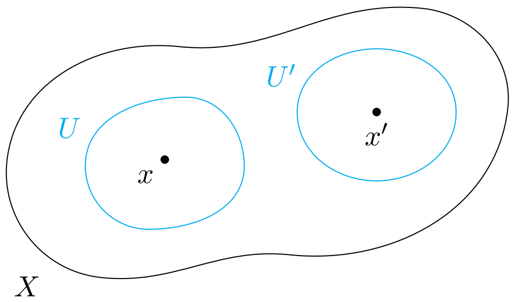
$$x \in U \quad \text{et} \quad x' \in U' \qquad \text{avec} \qquad U \cap U' = \emptyset.$$

On dit alors simplement que le couple $(X, \mathcal{T})$ est un *espace de Hausdorff.*

Le **slogan** à retenir est donc :

$\boxed{\textbf{Hausdorff} \iff \text{on peut toujours } \textit{séparer} \textbf{ deux points} \text{ par des } \textit{ouverts}}$

et on peut illustrer ce concept par un schéma :



Exemple 1.2. Étudions quelques conditions pour qu'un espace topologique soit de Hausdorff.

(0) Considérons $(X, \mathcal{T}_{\text{gr}})$. Si $\#X \geq 2$, alors ce n'est pas un espace de Hausdorff.

(∞) L'espace $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ est de Hausdorff pour tout V.

(1) Si $(X, \mathcal{T})$ métrisable, alors $(X, \mathcal{T})$ est Hausdorff. En effet, si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ pour d une métrique sur X et $x \neq x'$, alors $d(x, x') > 0$. Posons $r = \dfrac{d(x, x')}{2}$. Alors on a

$$x \in B_d(x, r) \quad \text{et} \quad x' \in B_d(x', r) \qquad \text{avec} \qquad B_d(x, r) \cap B_d(x', r) = \emptyset.$$

Lemme 1.3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff et $Y \subset X$. Si $\#Y < \infty$, alors Y est fermé par rapport à $\mathcal{T}$.*

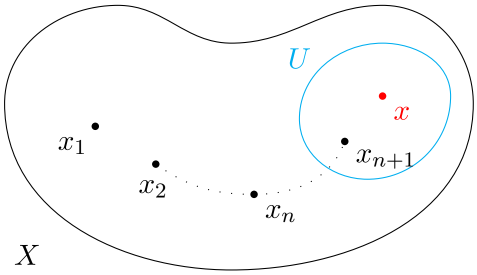
Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $y \in Y$, le singleton $\{y\}$ est fermé puisque toute réunion de fermés est fermée. Pour cela, on doit montrer que $X \backslash \{y\}$ est ouvert. Comme $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff, on sait que pour tout $x \in X \backslash \{y\}$, il existe U_x et U_y tels que

$$x \in U_x \quad \text{et} \quad y \in U_y \qquad \text{avec} \qquad U_x \cap U_y = \emptyset.$$

On a alors $\displaystyle\bigcup_{x \in X \backslash \{y\}} U_x = X \backslash \{y\}$ ce qui montre que $X \backslash \{y\}$ est ouvert et ainsi, son complémentaire $\{y\}$ est fermé. Par (F3), on a que $Y = \displaystyle\bigcup_{y \in Y} \{y\}$ est fermé. □

Corollaire 1.4. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff et $\#X < \infty$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{disc}}$.*

Définition 1.5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X *converge* vers un $x \in X$ si pour tout $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, il existe un $N_U \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_U$, on ait $x_n \in U$. Dans ce cas, on dit que x est une *limite* de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



Il est important de noter qu'on a utilisé le déterminant *une* limite, et non pas *la* limite, puisqu'en Topologie, une suite peut posséder plusieurs limites, comme le montrent les exemples suivants.

EXEMPLE 1.6. Étudions le comportement des suites dans quelques topologies.

(0) Considérons $(X, \mathcal{T}_{\text{gr}})$. Alors tout $x \in X$ est une limite de toute suite.

(∞) Considérons $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = x$ pour tout $n \geq N$.

(1) Soient $X = \{x, y\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}$ et considérons $(X, \mathcal{T})$. Alors la suite constante $(y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à la fois vers x et y.

Ainsi, la notion de limite est un peu ambiguë en Topologie. Cependant, les espaces de Hausdorff permettent de régulariser ce problème en garantissant l'*unicité* des limites.

PROPOSITION 1.7. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.*

DÉMONSTRATION. *Par l'absurde.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge. Si $x, y \in X$ étaient deux limites distinctes de cette suite, alors par définition de la convergence, pour tout $U, V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$ et $y \in V$, il existerait $M, N \in \mathbb{N}$ tels que

$$x_n \in U,\ \forall n \geq M \qquad \text{et} \qquad x_n \in V,\ \forall n \geq N.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq \max(M, N)$, on aurait

$$x_n \in U \cap V \implies U \cap V \neq \emptyset.$$

Ainsi, on aurait que si $x \in U$ et $y \in V$ avec $U, V \in \mathcal{T}$, alors on aurait forcément que $U \cap V \neq \emptyset$ et cela contredit le fait que $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff. $\lightning$
Ainsi, une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut avoir deux limites distinctes. $\square$

Proposition 1.8. *La propriété "être de Hausdorff" est une propriété topologique.*

Démonstration. Voir la Remarque 3.6 quelques pages plus loin. $\square$

Proposition 1.9. *Tout sous-espace compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

Démonstration. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff et $A \subset X$ tel que $(A, \mathcal{T}_A)$ soit compact. Pour montrer que A est fermé, on veut montrer que $A = \overline{A}$, autrement dit, que si $x \in X \backslash A$, alors $x \notin \overline{A}$. Soit donc $x \in X \backslash A$. Alors puisque $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, on sait que pour tout $a \in A$, il existe $U_a, V_a \in \mathcal{T}$ tels que

$$a \in U_a \quad \text{et} \quad x \in V_a \qquad \text{avec} \qquad U_a \cap V_a = \emptyset.$$

On observe que $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Or $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact, ce qui implique qu'il existe

$$a_1, \ldots, a_n \in A \qquad \text{tels que} \qquad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} = U.$$

Posons $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \in \mathcal{T}$ par (T3). Alors puisque $x \in V_{a_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on a que $x \in V$. De plus, $V \cap U = \emptyset$ parce que $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ pour tout i. Comme $A \subset U$, on en déduit que $A \cap V = \emptyset$ et par conséquent, $x \notin \overline{A}$ par la caractérisation de l'adhérence, et on conclut que $A = \overline{A}$. $\square$

L'astuce qu'on a utilisé dans cette preuve de trouver un recouvrement ouvert, en extraire un recouvrement fini, prendre d'un côté une réunion et de l'autre côté une intersection, va revenir de nombreuses fois par la suite.

Proposition Bien Utile 1.10. *Soit $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ une application continue et bijective. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact et $(X', \mathcal{T}')$ est de Hausdorff, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Comme l'application f est déjà continue et bijective, il nous reste à montrer que l'inverse f^{-1} est aussi continue, autrement dit que $(f^{-1})^{-1}(C)$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}$, pour tout C fermé de $(X, \mathcal{T})$ par le Théorème 6.8 de la caractérisation de la continuité par les fermés. Comme f et f^{-1} sont bijectives, on a $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$. Soit $C \subset X$ un fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Puisque $(X, \mathcal{T})$ est compact, $(C, \mathcal{T}_C)$ est aussi compact par le point (1) du Lemme 7.4 du chapitre 2.

Mais alors, comme $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue, on sait que $\left(f(C), \mathcal{T}'_{f(C)}\right)$ est aussi compact par le point (2) du même Lemme 7.4 du chapitre 2. Puisque $(X', \mathcal{T}')$ est de Hausdorff, la Proposition 1.9 implique que $f(C)$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}'$. □

2. Espaces réguliers

On introduit à présent une condition de séparabilité encore plus stricte.

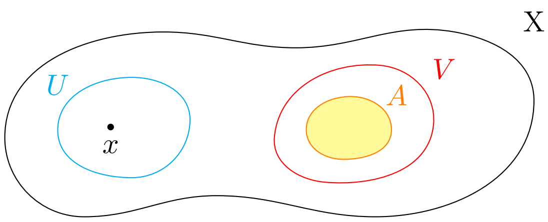
DÉFINITION 2.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique tel que tout singleton est fermé. Alors $(X, \mathcal{T})$ est un *espace régulier* si pour tout $x \in X$ et tout A fermé tel que $x \notin A$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que

$$x \in U \quad \text{et} \quad A \subset V \qquad \text{avec} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Pour cette notion, le **slogan** à retenir est :

Régulier $\Longleftrightarrow$ on peut toujours *séparer* **un point** et **un fermé** par des *ouverts*

et la situation se représente par l'illustration :



REMARQUE 2.2. On a les relations

$$\text{régulier} \implies \text{Hausdorff} \qquad \text{mais} \qquad \text{Hausdorff} \not\Longrightarrow \text{régulier}.$$

EXEMPLE 2.3. Donnons des exemples d'espaces réguliers.

(∞) $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ est régulier.

(1) Tout espace métrisable est régulier.

Dans la Remarque 2.2, on a vu qu'être de Hausdorff n'est pas suffisant pour être régulier. Que manque-t-il concrètement à un espace de Hausdorff pour devenir régulier alors ?

PROPOSITION 2.4. *Si $(X, \mathcal{T})$ est compact et est de Hausdorff, alors il est régulier.*

Démonstration. Soient $x \in X$ et $A \subset X\backslash\{x\}$ un fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Puisque $(X,\mathcal{T})$ est compact, on sait que $(A,\mathcal{T}_A)$ est aussi compact par le Lemme 7.4 du Chapitre 2. Puisque $(X,\mathcal{T})$ est de Hausdorff, pour tout $a \in A$, il existe $U_a, V_a \in \mathcal{T}$ tels que

$$a \in U_a \quad \text{et} \quad x \in V_a \qquad \text{avec} \qquad U_a \cap V_a = \emptyset.$$

On observe que $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a \in \mathcal{T}$. Or, $(A,\mathcal{T}_A)$ est compact, donc il existe

$$a_1,\ldots,a_n \in A \qquad \text{tels que} \qquad A = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} = U \in \mathcal{T}$$

par (T2). Si on pose $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \in \mathcal{T}$ par (T3) et $x \in V$, alors

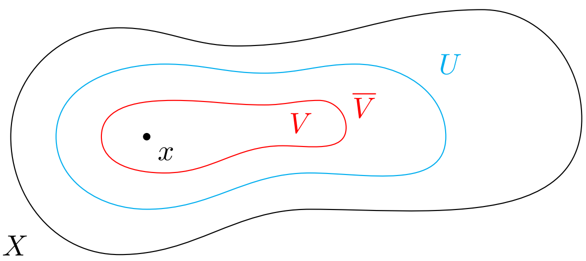
$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{a_i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(U_{a_i} \cap V_{a_i})}_{=\emptyset} = \emptyset.$$

On a ainsi trouvé un ouvert U qui contient A et un autre ouvert V qui contient x dont leur intersection est vide, l'espace est donc régulier. $\square$

Théorème 2.5. **Caractérisation des espaces réguliers.** *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique tel que tout singleton est fermé. Alors*

$$(X,\mathcal{T}) \text{ est régulier } \iff \forall x \in U \in \mathcal{T},\ \exists V \in \mathcal{T} \text{ tel que } x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

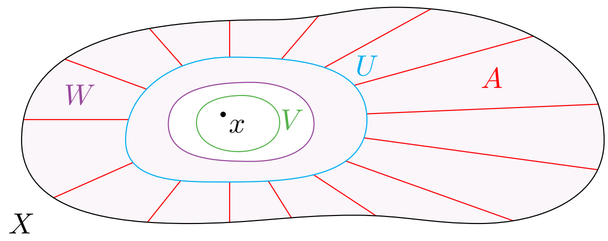
Avant de procéder à la preuve, voici une illustration :



Démonstration. $(\Longrightarrow)$: Posons $A = X\backslash U$ un fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Si $x \in U$, alors $x \notin A$. Par la régularité de $(X,\mathcal{T})$, on sait qu'il existe $V, W \subset \mathcal{T}$ tels que

$$x \in V \quad \text{et} \quad A \subset W \qquad \text{avec} \qquad V \cap W = \emptyset.$$

Pour voir que $\overline{V} \subset U$, on se base sur le schéma ci-dessous :



Comme $X\backslash U \subset W$, on sait que $X\backslash W \subset U$ et il s'agit d'un fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Par ailleurs, puisque $V \cap W = \emptyset$, on a $V \subset X\backslash W$, ce qui implique que $V \subset \overline{V} \subset X\backslash W \subset U$.

($\Longleftarrow$) : Soient $x \in X$ et $A \subset X\backslash\{x\}$ un fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Puisque $A \subset X\backslash\{x\}$, on sait que $x \in X\backslash A$. Par ailleurs, $X\backslash A \in \mathcal{T}$. Par hypothèse, il existe alors $V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in V$ et $\overline{V} \subset X\backslash A$, donc $A \subset X\backslash\overline{V}$ et $X\backslash\overline{V} \in \mathcal{T}$. Il nous reste encore à voir que $V \cap \big(X\backslash\overline{V}\big) = \emptyset$, mais ceci est une conséquence immédiate du fait que $V \subset \overline{V}$, donc $V \cap \big(X\backslash\overline{V}\big) = \emptyset$.

$\square$

Remarque 2.6. Si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$, alors on peut supposer que $V \in \mathcal{B}$, parce que tout élément de la topologie est une réunion d'éléments dans la base.

Proposition 2.7. *On a les affirmations suivantes :*

(1) Tout sous-espace d'un espace topologique régulier est régulier ;

(2) Tout produit d'espaces topologiques réguliers est régulier.

Démonstration. On prouve point par point.

(1) Soient $(X, \mathcal{T})$ est un espace régulier et $Y \subset X$. Posons $y \in Y$ et soit $A \subset Y\backslash\{y\}$ un fermé par rapport à $\mathcal{T}_Y$. Alors il existe un fermé $B \subset X$ par rapport à $\mathcal{T}$ tel que $A = B \cap Y$. On observe que $y \notin A \implies y \notin B$. Par la régularité de $(X, \mathcal{T})$, on sait qu'il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que

$$y \in U \quad \text{et} \quad B \subset V \qquad \text{avec} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Par conséquent, on a aussi

$$y \in U \cap Y \in \mathcal{T}_Y \qquad \text{et} \qquad A = B \cap Y \subset V \cap Y \in \mathcal{T}_Y$$

et leur intersection vaut

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) \subset (U \cap V) = \emptyset$$

ce qui implique que $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. On a ainsi trouvé une séparation de y et de A.

(2) Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ un ensemble d'espaces réguliers. Appliquons la caractérisation des espaces réguliers pour montrer que $\left(\prod_{i \in I} X_i, \underset{i\in I}{*} \mathcal{T}_i\right)$ est bien régulier. Soient donc

$$\boldsymbol{x} \in \prod_{i \in I} X_i \quad \text{et} \quad U \in \underset{i\in I}{*} \mathcal{T}_i \quad \text{tel que} \quad \boldsymbol{x} \in U.$$

Alors il existe un élément de base

$$\prod_{i \in I} U_i \qquad \text{tel que} \qquad \boldsymbol{x} \in \prod_{i \in I} U_i \subset U.$$

Pour rappel : $\#\{i \in I \mid U_i \neq X_i\} < \infty$, donc on peut écrire

$$\#\{i \in I \mid U_i \neq X_i\} = \{i_1, \dots, i_n\}.$$

Alors on sait que $x_{i_k} \in U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $\forall k$. Par la régularité de $(X_{i_k}, \mathcal{T}_{i_k})$, il existe un $V_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ tel que

$$x_{i_k} \in V_{i_k} \subset \overline{V_{i_k}} \subset U_{i_k}.$$

Alors

$$\boldsymbol{x} \in \prod_{i \in I} V_i \subset \overline{\prod_{i \in I} V_i} \subset \prod_{i \in I} \overline{V_i} \subset \prod_{i \in I} U_i \qquad \text{où} \qquad V_i = \begin{cases} X_i & \text{si} \quad i \neq i_k, \quad \forall k \\ V_{i_k} & \text{si} \quad i = i_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Par la caractérisation de la régularité, on conclut que l'espace produit est aussi régulier.

□

3. Espaces normaux

La troisième et dernière notion de séparabilité que nous aborderons est encore plus restrictive que la régularité !

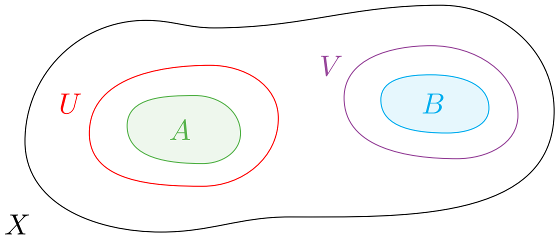
Définition 3.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique tel que tout singleton est fermé. Alors $(X, \mathcal{T})$ est un *espace normal* si pour tous $A, B \subset X$ fermés et disjoints, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que

$$A \subset U \quad \text{et} \quad B \subset V \qquad \text{avec} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Il faut donc retenir le **slogan** :

$\boxed{\textbf{Normal} \iff \text{on peut toujours } \textit{séparer} \textbf{ deux fermés} \text{ par des } \textit{ouverts}}$

et la représentation à garder en mémoire est :



Remarque 3.2. On a les relations

$$\text{normal} \implies \text{régulier} \qquad \text{mais} \qquad \text{régulier} \not\Longrightarrow \text{normal}$$

ce qui, combiné avec la Remarque 2.2, donne

$$\text{normal} \implies \text{régulier} \implies \text{Hausdorff.}$$

Théorème 3.3. **Caractérisation des espaces normaux.** *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique tel que tout singleton est fermé. Alors*

$$(X, \mathcal{T}) \text{ est normal } \iff \forall A \subset X \text{ fermé}, \forall A \subset U \in \mathcal{T}, \exists V \in \mathcal{T} \text{ tel que } A \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Démonstration. La preuve est très semblable au cas de la caractérisation de la régularité en remplaçant $\{x\}$ par A. □

Bien que les deux preuves soient semblables, il est important de noter que celle pour les espaces normaux est un peu plus subtile puisque, dans le "monde" des espaces normaux, les choses ne fonctionnent pas aussi bien que dans celui des espaces réguliers. En particulier, on peut faire l'observation suivante.

Remarque 3.4. La Proposition 2.7 dans le cas des espaces réguliers n'admet pas d'équivalent dans le cas des espaces normaux.

(1) Il existe des espaces normaux dont les sous-espaces ne sont pas forcément normaux.
(2) Il existe des espaces normaux $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ tels que $(X \times X', \mathcal{T} * \mathcal{T}')$ n'est pas normal.

Proposition 3.5. *La propriété "être normal" est une propriété topologique.*

DÉMONSTRATION. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques et

$$h : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$$

un homéomorphisme. Sans perte de généralité, on peut supposer que $(X, \mathcal{T})$ est normal. Soient $A', B' \subset X'$ des fermés par rapport à $\mathcal{T}'$ tels que $A' \cap B' = \emptyset$. Considérons $h^{-1}(A)$ et $h^{-1}(B)$ qui sont des fermés par rapport à $\mathcal{T}$ car h est continue. Puisque $(X, \mathcal{T})$ est normal, on sait qu'il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que

$$h^{-1}(A) \subset U \quad \text{et} \quad h^{-1}(B) \subset V \qquad \text{avec} \qquad U \cap V = \emptyset$$

Alors puisque h est une application ouverte, on a $h(U), h(V) \in \mathcal{T}'$. Par ailleurs, comme $U \cap V = \emptyset$ et h est injective, on sait que $h(U) \cap h(V) = \emptyset$. Finalement, on a

$$A' = h\big(h^{-1}(A')\big) \subset h(U) \qquad \text{et} \qquad B' = h\big(h^{-1}(B')\big) \subset h(V)$$

par la surjectivité de h. □

REMARQUE 3.6. Les preuves des faits que “être de Hausdorff” et “être régulier” sont des propriétés topologiques sont tout à fait semblables.

PROPOSITION 3.7. **Sources des espaces normaux.** *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est normal si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) $(X, \mathcal{T})$ est régulier et admet une base dénombrable ;

(2) $(X, \mathcal{T})$ est métrisable ;

(3) $(X, \mathcal{T})$ est compact et est de Hausdorff.

DÉMONSTRATION. Soient $A, C \subset X$ des fermées par rapport à $\mathcal{T}'$ tels que $A \cap C = \emptyset$.

(1) Pour tout $a \in A$, puisque $a \in X \backslash C$ et C est fermé, il existe un $U \in \mathcal{T}$ tel que $a \in U = X \backslash C$. Comme $(X, \mathcal{T})$ est régulier, par la caractérisation de la régularité, il existe $B_a \in \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de $\mathcal{T}$, tel que

$$a \in B_a \subset \overline{B_a} \subset U.$$

De même, pour tout $c \in C$, il existe un $B_c \in \mathcal{B}$ tel que

$$c \in B_c \subset \overline{B_c} \subset X \backslash A.$$

Par conséquent, on a $A = \bigcup_{a\in A} B_a$ et $C \subset \bigcup_{c\in C} B_c$. Or la base $\mathcal{B}$ est dénombrable, donc il existe $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset A$ et $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset C$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{a_i} \qquad \text{et} \qquad B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{c_i}.$$

Posons

$$U_n = B_{a_n} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_{c_i}} \in \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad V_n = B_{i_n} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_{a_i}} \in \mathcal{T}.$$

On observe que $a_n \in U_n$ et $c_n \in V_n$ et que $U_n \cap A = B_{i_n} \cap A$ puisque $\overline{B_{c_i}} \subset X\backslash A$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De même, $V_n \cap C = B_{i_c} \cap C$. Posons maintenant

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \qquad \text{et} \qquad V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

Alors on affirme deux choses.

Affirmation : *On a*

- **i)** $U \cap V = \emptyset$ *;*
- **ii)** $A \subset U$ *et* $C \subset V$*.*

Preuve : **i)** On observe que $U_m \cap V_n = \emptyset$ pour tous m et n. Si $m \geq n$, alors

$$U_m = B_{a_m} \backslash \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B_{c_i}} \qquad \text{et} \qquad V_n = B_{c_n} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_{a_i}$$

d'où $B_{c_n} \cap U_m = \emptyset$ et donc $U_m \cap V_n = \emptyset$. On procède de la même manière en inversant les rôles de U_m et V_n si $m \leq n$. Ainsi, on a $U \cap V = \emptyset$.

ii) Comme $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{a_n}$, on a $A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{a_n} = A$, c'est-à-dire

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_{a_n}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap U_n) = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

ce qui implique que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$. On procède de même pour montrer que $C \subset V$.

$\diagup$

(2) Soit d une métrique sur X telle que $(X, \mathcal{T}) \cong (X, \mathcal{T}_d)$. Puisque $a \in X \backslash C$ et C fermée, il existe $\varepsilon_a > 0$ tel que

$$B_d(a, \varepsilon_a) \cap C = \emptyset.$$

De même, pour tout $c \in C$, il existe $\varepsilon_c > 0$ tel que

$$B_d(a, \varepsilon_c) \cap A = \emptyset.$$

Donc $d(a, c) \geq \max(\varepsilon_a, \varepsilon_c)$. Posons

$$U = \bigcup_{a \in A} B_d\Big(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\Big) \qquad \text{et} \qquad V = \bigcup_{c \in C} B_d\Big(c, \frac{\varepsilon_c}{2}\Big).$$

Alors on a $A \subset U$, $C \subset V$ avec $U \cap V = \emptyset$.

(3) On sait déjà, par la Proposition 2.4, qu'un espace compact et de Hausdorff est régulier. Par conséquent, pour tout $a \in A$, il existe $U_a, V_a \in \mathcal{T}$ tels que

$$a \in U_a \quad \text{et} \quad C \subset V_a \qquad \text{avec} \qquad U_a \cap V_a = \emptyset.$$

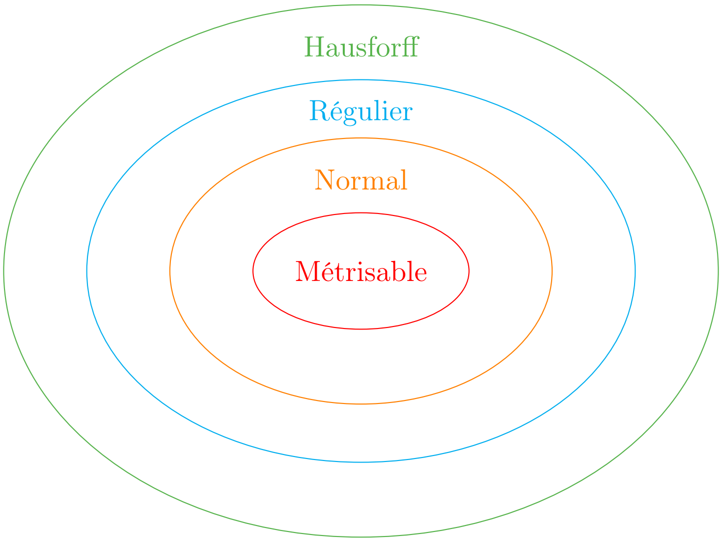
Ainsi, on a $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Or, comme A est fermé et que $(X, \mathcal{T})$ est compact, on sait que $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact par le Lemme 7.4 du chapitre 2. Il existe donc

$$a_1, \ldots, a_n \in A \qquad \text{tels que} \qquad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} = U.$$

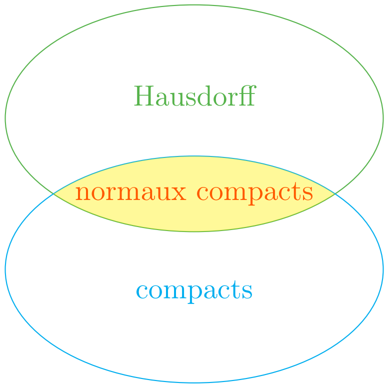
Il nous reste à poser $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$.

$\square$

En résumé, on peut représenter ces différentes notions de séparabilités par les diagrammes suivants :



et de plus :



d. Le Lemme d'Urysohn et ses conséquences

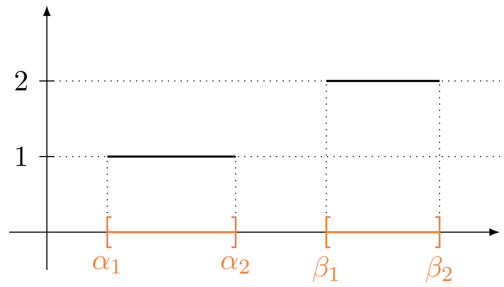
Le but de cette dernière section de ce chapitre est d'illustrer comment la normalité d'un espace peut avoir des implications importantes sur les applications continues dont le domaine est cet espace.

Lemme 4.1. **d'Urysohn.** *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique normal, alors pour tous $A, B \subset X$ fermés disjoints et pour tous $a < b \in \mathbb{R}$, il existe une application continue*

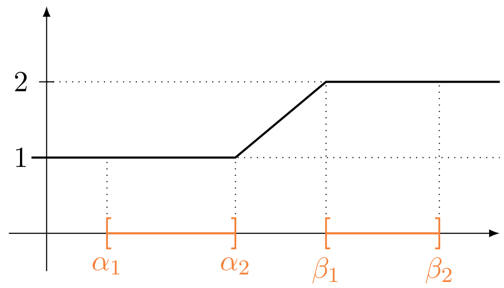
$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \Big([a, b], (\mathcal{T}_{\rm st})_{[a,b]}\Big) \qquad \text{telle que} \qquad f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \in A \\ b & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Illustrons d'abord ce Lemme par un exemple facile !

Exemple Simple 4.2. Soit $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\rm st})$ et posons $A = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $B = [\beta_1, \beta_2]$ où $\alpha_2 < \beta_1$. Soit encore $a = 1$ et $b = 2$. Nous cherchons à comprendre comment rendre le graphe suivant continu :

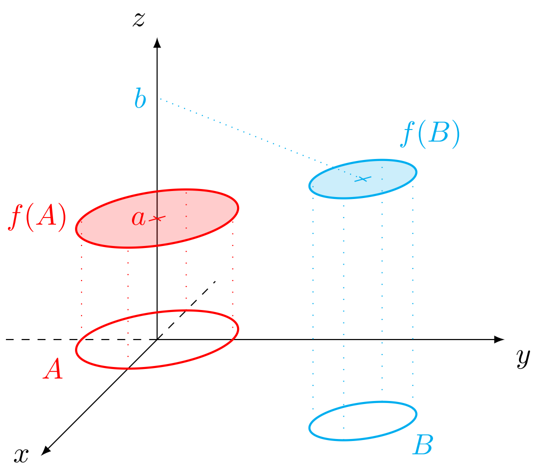


La solution s'avère être simple : il suffit de faire une interpolation linéaire entre les deux jonctions et attribuer $f(x) = 1$ pour $x < \alpha_1$ et $f(x) = 2$ pour $x > \beta_2$.



On voit clairement que l'application f ainsi obtenue est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Cet exemple était très élémentaire, mais si à la place de travailler dans $\mathbb{R}$ on travaillait dans $\mathbb{R}^2$, avec une valeur précise sur une boule fermée, par exemple $A = \overline{B\big((0,0), \frac{1}{2}\big)}$, et une autre valeur précise sur une autre boule fermée, disons $B = \overline{B\big((5,6), \frac{1}{3}\big)}$, définir une application continue sur tout le plan devient alors un problème beaucoup plus difficile.



Alors comment peut-on prouver le Lemme d'Urysohn de manière générale quand on ne sait absolument rien sur l'espace topologique normal quelconque ? Nous allons donner l'esquisse de la preuve — pas dans tous les détails — il s'agit en effet peut-être de la preuve *la moins intuitive* de tout le cours. La Professeure a confié qu'elle-même n'avait aucune idée de comment quelqu'un a pu imaginer une preuve pareille.

Esquisse de la Preuve du Lemme 4.1. Sans perte de généralité, supposons que $a = 0$ et $b = 1$. Pour obtenir le cas général, il suffit d'appliquer une homothétie pour obtenir le a et b qu'on souhaite. Le premier pas consiste à choisir une bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ n & \longmapsto & q_n \end{array} \qquad \text{telle que} \qquad \begin{cases} q_0 & = & 1 \\ q_1 & = & 0 \end{cases}$$

Affirmation 1 : *Il existe une famille dénombrable d'ouverts* $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ *telle que*

$$A \subset U_n \subset X \backslash B \qquad et \qquad q_i < q_j \implies \overline{U_i} \subset U_j.$$

Preuve de l'affirmation 1 : Par récurrence sur n.

$(n = 0)$: Posons $U_0 = X \backslash B$. Par la caractérisation de la normalité, il existe un ouvert $U_1 \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0$.

$(n \implies n+1)$: Supposons qu'il existe $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{T}$ qui vérifie l'hypothèse de récurrence. On veut alors trouver un $U_{n+1} \in \mathcal{T}$ tel que

$$A \subset U_{n+1} \subset X \backslash B.$$

et tel que

$$q_i < q_{n+1} \implies \overline{U_i} \subset U_{n+1} \qquad \text{et} \qquad q_{n+1} < q_j \implies \overline{U_{n+1}} \subset U_j.$$

Soient

$$q_k = \max\{q_i \mid q_i < q_{n+1} \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n\}$$

et

$$q_\ell = \max\{q_j \mid q_{n+1} < q_j \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n\}$$

Alors $q_k < q_\ell$ et donc par hypothèse de récurrence, on a $\overline{U_k} \subset U_\ell$. Par la caractérisation de la normalité, il existe $U_{n+1} \in \mathcal{T}$ tel que

$$\overline{U_k} \subset U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_\ell.$$

qui vérifie donc les conditions souhaitées.

/

Affirmation 2 : *On définit* $f : X \longrightarrow [0,1]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in B \\ \inf\{q_i \mid x \in U_i\} & \text{si} \quad x \in X \backslash B \end{cases}$$

Alors $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in A$ *et*

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \Big([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\Big)$$

est continue.

Preuve de l'affirmation 2 : — Si $x \in A$, alors $f(x) = 0$, car $\inf\{q_i \mid x \in U_i\} = 0$.

— Il faut montrer la continuité en $x_0 \in X$. Pour cela, il y a trois cas à distinguer :

$$f(x_0) = 0; \qquad f(x_0) = 1; \qquad 0 < f(x_0) < 1.$$

On ne traitera que le dernier cas. On observe d'abord que

$$x \in \overline{U_i} \implies f(x) \leq q_i \qquad \text{et} \qquad x \in X \backslash U_i \implies f(x) \geq q_i.$$

On sait alors qu'il existe s et t tels que

$$0 < s < f(x_0) < t < d.$$

Par la densité des rationnels, il existe q_i et q_j tels que

$$s < q_i < f(x_0) < q_j < t$$

ce qui implique que

$$x_j \in U_j \backslash \overline{U_i} \in \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad f(U_j \backslash \overline{U_i}) \subset [q_i, q_j] \subset]s, t[$$

ce qui montre la continuité de f en x_0. Les autres cas s'obtiennent de manière similaire.

/

□

Une conséquence très importante de ce Lemme est le Théorème suivant.

THÉORÈME 4.3. **de métrisation d'Urysohn.** *Tout espace régulier qui admet une base dénombrable est métrisable.*

REMARQUE 4.4. Ce Théorème est en fait un inverse partiel à l'implication "métrisable $\implies$ normal". En résumé, on a les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{Régulier} + \text{Base dénombrable} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{Urysohn}"] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Métrisable} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{Normal} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration du Théorème 4.3. La démonstration étant longue et technique, nous ne l'abordons pas dans tous les détails, mais allons tout de même illustrer l'esprit de la preuve.

Stratégie : On voudrait montrer que si $(X, \mathcal{T})$ est régulier et admet une base dénombrable $\mathcal{B}$, alors il existe une application continue et injective

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \underbrace{\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \underset{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{*}\mathcal{T}_{\text{st}}\right)}_{\substack{\text{espace métrisable} \\ \text{car produit dénombrable} \\ \text{d'espaces métrisables}}}$$

telle que $f|^{\mathrm{Im}(f)}$ est un homéomorphisme.

Esquisse de la preuve : Comme $(X, \mathcal{T})$ est régulier et admet une base dénombrable $\mathcal{B}$, on sait par la Proposition 3.7, que $(X, \mathcal{T})$ est normal. Soient $B_k, B_\ell \in \mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors par le Lemme d'Urysohn, si $\overline{B_k} \subset B_\ell$, il existerait une application continue

$$f_{k,\ell} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \big([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\big)$$

telle que $f(\overline{B_k}) = \{1\}$ et $f(X \backslash B_\ell) = \{0\}$ car les deux ensembles sont fermés et disjoints parce que $\overline{B_k} \subset B_\ell$.

Soient $x \in X$ et $U \in \mathcal{T}$ un ouvert tel que $x \in U$. Alors il existe $B_\ell \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_\ell \subset U$. Par la caractérisation de la régularité, il existe alors $B_k \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_k \subset \overline{B_k} \subset B_\ell$. Donc il existe bien une application continue $f_{k,\ell}$ telle que

$$f_{k,\ell}(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad f_{k,\ell}(X \backslash B_\ell) = 0.$$

Définissons alors

$$\begin{array}{rccc} f : & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^I \\ & x & \longmapsto & \big(f_{k,\ell}(x)\big)_{(k,\ell)\in\mathcal{T}} \end{array}$$

où $I = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \overline{B_k} \subset B_\ell\}$. Alors

— f est continue, car chaque composante est continue.

— f est injective, car si $x \neq x' \in X$, alors il existe $B_\ell, B_{\ell'} \in \mathcal{B}$ tels que

$$x \in B_\ell \quad \text{et} \quad x' \in B_{\ell'} \qquad \text{avec} \qquad B_\ell \cap B_{\ell'} = \emptyset$$

parce que $(X,\mathcal{T})$ est normal. Considérons $x \in B_k \subset \overline{B_k} \subset B_\ell$. Alors $f_{k,\ell}(x) = 1$ mais $f_{k,\ell}(x') = 0$ car $x' \in B_{\ell'} \subset X \backslash B_\ell$. Ainsi $f(x) \neq f(x')$.

— f est ouverte lorsqu'elle est co-restreinte à $\mathrm{Im}(f)$, car pour tout $x \in U \in \mathcal{T}$, il existe $(k,\ell) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $f_{k,\ell}(x) > 0$ ce qui implique que

$$f(x) \in \mathrm{pr}_{k,\ell}^{-1}(]0,2[) \cap f(x) \subset f(U).$$

□

Théorème 4.5. **d'extension de Tietze.** *Si $(X,\mathcal{T})$ est normal, alors pour tout $A \subset X$ fermé et pour tous $a < b \in \mathbb{R}$ et pour toute application*

$$f : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow \Big([a,b], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[a,b]}\Big)$$

continue, il existe une application continue

$$\widehat{f} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \Big([a,b], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[a,b]}\Big)$$

telle que $\widehat{f}|_A = f$.

En d'autres termes, on a le diagramme suivant qui commute :

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{T}_A) \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & \big([a,b], (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_{[a,b]}\big) \\
(X,\mathcal{T}) \arrow[ur, "\exists \widehat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Chapitre 4

Autour de la notion de connexe

On aborde maintenant un nouveau chapitre qui concernera la connexité. C'est probablement la partie du cours qui s'approche le plus de la Topologie algébrique et on commence un tout petit peu à aborder comment intégrer l'Algèbre dans la Topologie. On aimerait rendre formel quelque chose de très intuitif : quand on regarde un espace topologique, par exemple un cercle comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$, un intervalle dans une droite ou encore une réunion d'intervalles, on a une idée de en combien de morceaux distincts cet espace est composé. Notre but ici est de rendre cette intuition formelle.

1. Espaces connexes

On va aborder cette première section d'une façon assez atypique pour un cours de Topologie en partant de la *propriété de la valeur intermédiaire.* Pour commencer, on va donner une définition qui n'est pas standard, mais que l'on va utiliser dans ce contexte de façon locale à ce cours.

Définition Non Standard 1.1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie la *propriété de valeur intermédiaire* (PVI) si pour toute application continue

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$$

et pour tout $x < y \in \mathrm{Im}(f)$, on a $[x, y] \subset \mathrm{Im}(f)$.

Cette définition — bien qu'elle ne soit pas standard — va nous permettre de faire le lien avec la notion de connexe. L'introduction de cette notion a pour but de rendre précis ce qu'on entend par "nombre de morceaux indépendants dont un espace est composé".

Théorème 1.2. **Caractérisation de la (PVI).** *Un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *ne vérifie pas la* (PVI) *si et seulement s'il existe des ouverts* $U, V \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$ *tels que*

$$U \cup V = X \qquad \text{et} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

DÉMONSTRATION. ($\Longrightarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la (PVI), alors il existe une application

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$$

telle que $[x, y] \not\subset \mathrm{Im}(f)$ où $x, y \in \mathrm{Im}(f)$. Autrement dit, il existe $z \in [x, y]$ tel que $z \notin \mathrm{Im}(f)$. Considérons $f^{-1}(]-\infty, z[)$ et $f^{-1}(]z, +\infty[)$ qui sont des ouverts car f est continue. Par ailleurs

$$f^{-1}(]-\infty, z[) \neq \emptyset \neq f^{-1}(]z, +\infty[) \qquad \text{car} \qquad \begin{cases} x < z & \text{et} \quad x \in \mathrm{Im}(f) \\ z < y & \text{et} \quad y \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

Ensuite on a

$$f^{-1}(]-\infty, z[) \cap f^{-1}(]z, +\infty[) = \emptyset$$

puisque $]-\infty, z[\, \cap \,]z, +\infty[= \emptyset$. Enfin,

$$f^{-1}(]-\infty, z[) \cup f^{-1}(]z, +\infty[) = X$$

car pour tout $w \in X$, soit $f(w) < z$, soit $f(w) > z$ puisque $z \notin \mathrm{Im}(f)$. Donc on peut poser

$$U = f^{-1}(]-\infty, z[) \qquad \text{et} \qquad V = f^{-1}(]z, +\infty[)$$

et on a bien $U, V \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$ avec $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$.

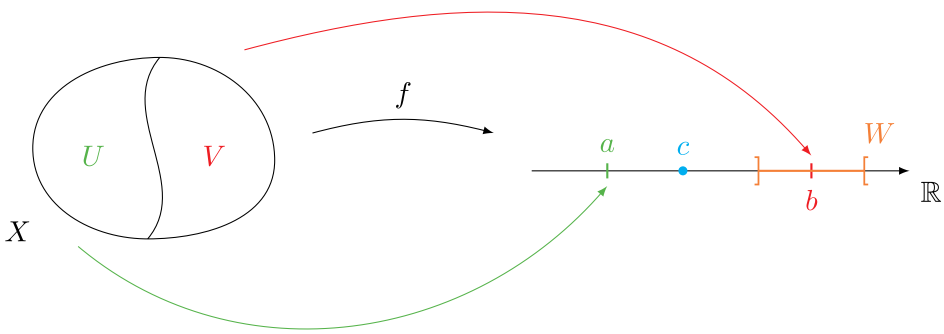
($\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe deux ouverts $U, V \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$ tels que

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{et} \qquad U \cup V = X.$$

Choisissons $a < b \in \mathbb{R}$ et définissons

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a & \text{si} \quad x \in U \\ b & \text{si} \quad y \in V \end{cases} \end{array}$$

Schématiquement, nous avons :



Cette application est bien définie car $U \cap V = \emptyset$ et est définie pour tout x car $x \in U \cup V$. Par ailleurs,

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$$

est bien continue, car pour tout $W \in \mathcal{T}_{\mathrm{st}}$, on a

$$f^{-1}(W) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad a \notin W, b \notin W \\ U & \text{si} \quad a \in W, b \notin W \\ V & \text{si} \quad a \notin W, b \in W \\ X & \text{si} \quad a \in W, b \in W \end{cases} \in \mathcal{T}$$

Cependant, pour tout $c \in \,]a, b[$, on a $c \notin \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $(X, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la (PVI).

□

Cette caractérisation nous motive à introduire la définition suivante.

DÉFINITION 1.3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soient $U, V \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$. On dit que le couple (U, V) est une *séparation* de $(X, \mathcal{T})$ si

$$U \cup V = X \qquad \text{et} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

On le note alors $U \mid V$.

Les préparatifs sont maintenant faits, notre but à présent est de rendre formel l'étude de la décomposition d'espaces en plusieurs “morceaux” par l'intermédiaire d'applications continue dont il est le *domaine*.

DÉFINITION 1.4. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *connexe* s'il n'admet aucune séparation.

REMARQUE 1.5. Par la caractérisation de la (PVI), on a

$$(X, \mathcal{T}) \text{ est connexe} \iff (X, \mathcal{T}) \text{ vérifie la (PVI).}$$

EXEMPLE 1.6. (0) Considérons $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{gr}})$. Alors il n'existe pas de séparation car $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ ne contient qu'un seul ouvert non vide. Il est donc toujours connexe.

(∞) Considérons $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}})$. Alors

— Si $\#X \leq 1$, alors $\mathcal{T}_{\mathrm{disc}} = \mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$, il est donc connexe.

— Si par contre $\#X \geq 2$, alors il existe une séparation, par exemple, pour tout $x_0 \in X$, il existe $\{x_0\} \mid \underbrace{X \backslash \{x_0\}}_{\neq \emptyset \text{ car } \#X \geq 2}$, il est donc non connexe.

(1) Puisque, comme vu en cours d'Analyse, $\left([a,b], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[a,b]}\right)$ vérifie la (PVI), on sait que $\left([a,b], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[a,b]}\right)$ est connexe.

Proposition 1.7. **Propriétés élémentaires.** *On a les affirmations suivantes :*

(1) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe et $A \subset X$ est ouvert et *fermé par rapport à $\mathcal{T}$, alors soit $A = X$, soit $A = \emptyset$;*

(2) L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe ;

(3) Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est un sous-espace connexe de $(X, \mathcal{T})$ et $U \mid V$ est une séparation de $(X, \mathcal{T})$, alors soit $Y \subset U$, soit $Y \subset V$;

(+) La propriété "être connexe" est une propriété topologique.

Démonstration. (1) *Par l'absurde.* Si $\emptyset \neq A \subsetneq X$, alors on aurait une séparation

$$\underbrace{A}_{\text{ouvert}} \mid \underbrace{X \backslash A}_{\substack{\text{ouvert car } A \neq \emptyset \\ \text{est fermé}}}$$

En effet,

$$A \cup (X \backslash A) = X \qquad \text{et} \qquad A \cap (X \backslash A) = \emptyset.$$

Cela contredirait le fait que $(X, \mathcal{T})$ est connexe. $\lightning$ Ainsi $A = \emptyset$ ou $A = X$.

(2) En exercice dans la Série 12.

(3) Soit $U \mid V$ une séparation de $(X, \mathcal{T})$. Considérons $U \cap Y, V \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Alors

$$(U \cap Y) \cup (V \cap Y) = (U \cup V) \cap Y = X \cap Y = Y$$

et

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \underbrace{(U \cap V)}_{= \emptyset} \cap Y = \emptyset.$$

Puisque $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est connexe, on ne peut pas avoir de séparation, donc soit $U \cap Y = \emptyset$, soit $V \cap Y = \emptyset$, ce qui implique que $Y \subset V$ ou $Y \subset U$.

(+) En exercice dans la Série 12.

$\square$

Proposition 1.8. **Constructions d'espaces connexes.**

(1) **Recollement.** *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$. *Posons* $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. *Si* $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ *et* $(A_i, \mathcal{T}_{A_i})$ *est connexe pour tout* $i \in I$, *alors* $(A, \mathcal{T}_A)$ *est aussi connexe.*

(2) **Adhérence.** *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset X$. *Si* $(A, \mathcal{T}_A)$ *est connexe, alors* $(B, \mathcal{T}_B)$ *est aussi connexe pour tout* $A \subset B \subset \overline{A}$.

(3) **Produits finis.** *Tout produit fini d'espaces connexes est connexe.*

Démonstration. On démontre point par point.

(1) On démontre que $(A, \mathcal{T}_A)$ vérifie la (PVI). Soient

$$f : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$$

une application continue et $x < y \in \operatorname{Im}(f)$. On voudrait voir que $[x, y] \subset \operatorname{Im}(f)$. Soit donc $z \in [x, y]$. Puisque $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, il existe $i_0, i_1 \in I$ et $a_0 \in A_{i_0}, a_1 \in A_{i_1}$ tels que

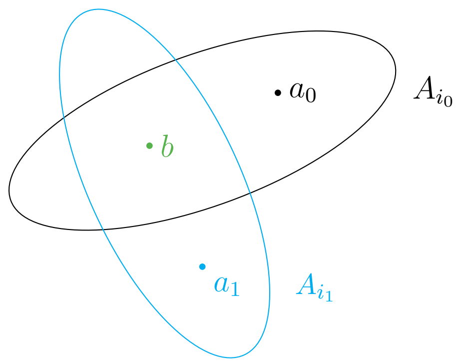
$$f(a_0) = x \qquad \text{et} \qquad f(a_1) = y.$$

— Si $i_0 = i_1$, alors on peut conclure, car

$$f|_{A_{i_0}} : (A_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$$

est continue et $x = f(a_0), y = f(a_1) \in \operatorname{Im}\big(f|_{A_{i_0}}\big)$. Or, par hypothèse, $(A_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0})$ est connexe, il vérifie donc la (PVI). Il existe ainsi $a_2 \in A_{i_0} \subset A$ tel que $f(a_2) = z$, donc $z \in \operatorname{Im}(f)$.

— Si $i_0 \neq i_1$, alors choisissons un élément $b \in A_{i_0} \cap A_{i_1}$.

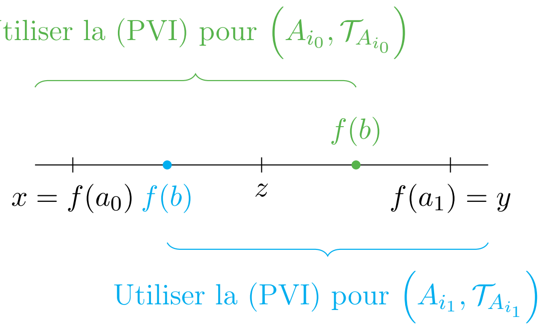


On a $f(a_0) = x < f(a_1) = y$.

- Si $f(b) \leq f(a_0) = x < f(a_1) = y$, alors par la (PVI) pour $(A_{i_1}, \mathcal{T}_{i_1})$, il existe $a' \in A_{i_1}$ tel que

$$f(b) < f(a') = z < f(a_1) = y.$$

- Si $f(b) \geq f(a_0)$, alors on peut illustrer les emplacements respectifs comme suit :



Ainsi en traitant les deux cas séparément, on a que

$\star$ Soit il existe $a' \in A_{i_1}$ tel que $f(a') = z$;

$\star$ Soit il existe $a'' \in A_{i_0}$ tel que $f(a'') = z$.

En conclusion, $(A, \mathcal{T}_A)$ vérifie la (PVI).

(2) *Par contradiction.* On suppose que $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe. Soit $A \subset B \subset \overline{A}$ et utilisons la caractérisation de l'adhérence. Si $U \mid V$ était une séparation de $(B, \mathcal{T}_B)$, alors il y aurait $\emptyset \neq \widetilde{U}, \widetilde{V} \in \mathcal{T}$ tels que

$$U = \widetilde{U} \cap B \qquad \text{et} \qquad V = \widetilde{V} \cap B$$

avec

$$U \cup V = B \qquad \text{et} \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Par la caractérisation de l'adhérence, on a

$$U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$$

puisque $U \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$, donc ils contiennent au moins un élément de B. Alors on aurait une séparation $U \cap A \mid V \cap A$ de A parce que

$$U \cap A = \widetilde{U} \cap A \in \mathcal{T}_A \qquad \text{et} \qquad V \cap A = \widetilde{V} \cap A \in \mathcal{T}_A$$

et

$$(U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cap V) \cap A = B \cap A = A.$$

Cela contredit le fait que $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe. ↯ Ainsi il n'existe pas de séparation de $(B, \mathcal{T}_B)$.

(3) Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces connexes. Puisque “être connexe” est une propriété topologique et pour tout $x_0 \in X$, on a

$$\left(\{x_0\} \times X', \mathcal{T}_{\{x_0\}} * \mathcal{T}'\right) \cong (X', \mathcal{T}')$$

et pour tout $x'_0 \in X'$, on a

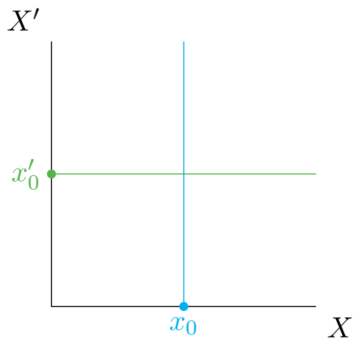
$$\left(X \times \{x'_0\}, \mathcal{T} * \mathcal{T}'_{\{x'_0\}}\right) \cong (X', \mathcal{T}')$$

alors $\left(\{x_0\} \times X', \mathcal{T}_{\{x_0\}} * \mathcal{T}'\right)$ et $\left(X \times \{x'_0\}, \mathcal{T} * \mathcal{T}'_{\{x'_0\}}\right)$ sont connexes. Donc par le point (1), si

$$T_{x_0,x'_0} = (\{x_0\} \cup X') \cup (X \times \{x'_0\})$$

alors $\left(T_{x_0,x'_0}, (\mathcal{T} * \mathcal{T}')_{T_{x_0,x'_0}}\right)$ est aussi connexe. On observe que

$$\bigcup_{x_0 \in X} T_{x_0,x'_0} = X \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{x_0 \in X} T_{x_0,x'_0} = X \times \{x'_0\} \neq \emptyset.$$



De nouveau par (1), on sait que $(X, \mathcal{T} * \mathcal{T}')$ est connexe.

Pour un produit fini quelconque, on procède par récurrence en utilisant cette construction.

□

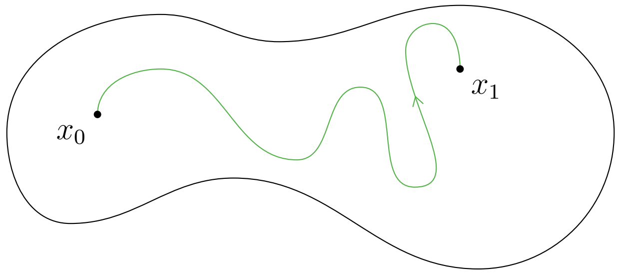
2. Espaces connexes par arcs

Cette nouvelle section traite une notion de “connexité” encore plus intuitive que la précédente. Le but sera d'étudier un espace espace en termes d'applications continues dont il est le *co-domaine*, à l'encontre de la notion de connexité qui peut se formuler, grâce à la (PVI), en termes d'applications continues dont l'espace est le *domaine*.

DÉFINITION 2.1. Un *chemin* dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est une application continue

$$\lambda : \left([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\right) \longrightarrow (X, \mathcal{T}).$$

Si $\lambda(0) = x_0$ et $\lambda(1) = x_1$, on dit que λ est un *chemin de x_0 vers x_1*.



DÉFINITION 2.2. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *connexe par arcs* si pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin λ dans X tel que $\lambda(0) = x_0$ et $\lambda(1) = x_1$.

PROPOSITION 2.3. **Propriétés élémentaires.**

(1) Tout espace connexe par arcs est connexe ;

(2) La propriété "être connexe par arcs" est une propriété topologique.

DÉMONSTRATION. (1) En exercice dans la Série 12.

(2) Soit

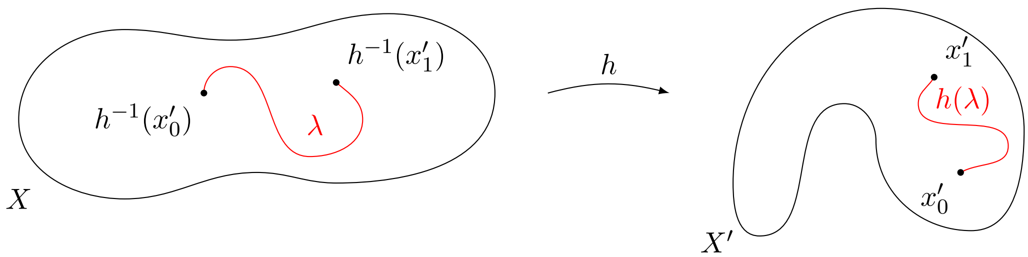
$$h : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$$

un homéomorphisme. Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs, alors pour tout $x_0', x_1' \in X'$, on a $h^{-1}(x_0'), h^{-1}(x_1') \in X$ et donc il existe un chemin

$$\lambda : \Big([0, 1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\Big) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

tel que

$$\lambda(0) = h^{-1}(x_0') \qquad \text{et} \qquad \lambda(1) = h^{-1}(x_1').$$



Alors

$$(h \circ \lambda) : \Big([0, 1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\Big) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$$

est continue, car il s'agit d'une composée d'applications continues et on a

$$(h \circ \lambda)(0) = x_0' \qquad \text{et} \qquad (h \circ \lambda)(1) = x_1'.$$

$\square$

EXEMPLE 2.4. Voyons quelques exemples d'espaces connexes par arcs.

(0) $(X, \mathcal{T}_{\text{gr}})$ est toujours connexe par arcs, car pour tout $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin

$$\begin{array}{rcccl} \lambda & : & \left([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\right) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}_{\text{gr}}) \\ & & t & \longmapsto & \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad t = 0 \\ x_1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases} \end{array}$$

Cette application est bien continue, car tout application dont le co-domaine est muni de $\mathcal{T}_{\text{gr}}$ est continue.

(∞) $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ n'est pas connexe si $\#X \geq 2$, il n'est donc pas connexe par arcs si $\#X \geq 2$ par le point (1) de la Proposition 2.3.

(1) Si $X \subset \mathbb{R}$ est connexe, alors $(X, (\mathcal{T}_{\text{st}})_X)$ est bien sûr connexe par arcs, car on peut toujours relier deux points de la droite réelle par un segment de la droite.

Et que peut-on dire pour $A \subset \mathbb{R}^n$? Si par exemple A est *convexe*, i.e. pour tous $a_0, a_1 \in A$, le segment qui les relie est inclus dans A, alors $(A, (\mathcal{T}_{\text{st}})_A)$ est connexe par arcs.

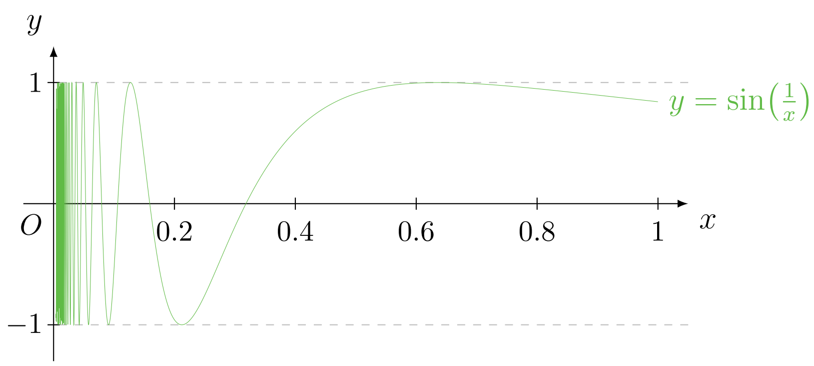
Ainsi, il arrive parfois que la géométrie puisse nous aider à déterminer quand un espace topologique est connexe par arcs — il s'agit donc d'une notion très tangible à la géométrie.

On a vu précédemment que tout espace connexe par arcs est connexe. Mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Donnons un exemple célèbre qui porte un nom marrant pour des raisons perdues dans l'histoire.

THÉORÈME 2.5. *La* courbe sinus de topologue $\overline{S}$ *où*

$$S = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \;\middle|\; x \in \left]0,1\right] \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

est connexe, mais non connexe par arcs en tant que sous-espace de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{st}})$.



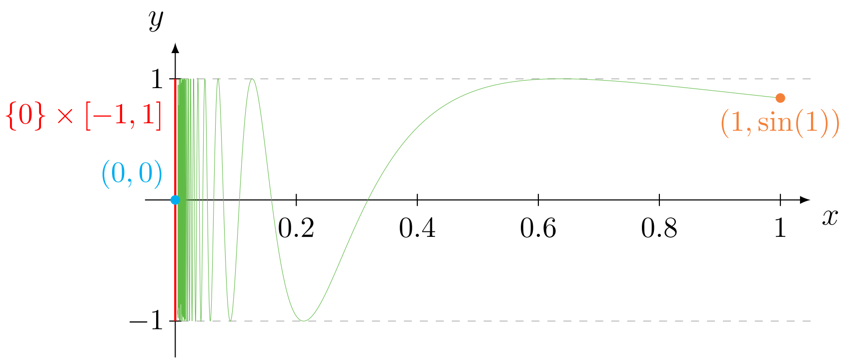
Démonstration. Nous n'allons pas donner tous les détails de la preuve. L'espace topologique $(S, (\mathcal{T}_{\text{st}})_S)$ est connexe, car il s'agit de l'image d'un espace connexe par une application continue

$$\begin{array}{rcl} \big(]0;+\infty[, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{]0;+\infty[}\big) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{st}}) \\ x & \longmapsto & \big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big)\big) \end{array}$$

Considérons l'adhérence $\big(\overline{S}, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{\overline{S}}\big)$.

— Cet espace est alors aussi connexe par le point (2) de la Proposition 1.8.

— Cependant, il n'est pas connexe par arcs ! En effet, quand on prend l'adhérence, cela revient à ajouter le segment $\{0\} \times [-1, 1]$ que l'on représente en rouge ci-dessous.



On peut alors montrer qu'il n'existe pas de chemin reliant $(0, 0)$ à $(1, \sin(1))$. En effet, s'il y avait un tel chemin λ, alors il y aurait un $m > 0$ tel que si $t \geq m$, alors $\lambda(t) \in S$ car $\{0\} \times [-1, 1]$ est fermé. On peut ensuite construire en utilisant la (PVI) de $]m; +\infty[$, une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ qui converge vers m, mais dont la suite $(\lambda(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, car

$$\lambda(t_n) = \begin{cases} (t_n, -1) & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ (t_n, 1) & \text{si} \quad n \text{ est pair} \end{cases}$$

Or, une application continue doit envoyer une suite convergente sur une suite convergente, ce qui montre que l'espace n'est pas connexe par arcs.

□

3. Composantes locales (par arcs)

Nous avons déjà brièvement mentionné la possibilité de pouvoir décomposer un espace en des parties qui tiennent ensemble. Le but dans cette section est d'étudier cela plus en détails. On va étudier les cas des espaces connexes et connexes par arcs séparément.

3.1. Cas connexe.

DÉFINITION 3.1. Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique. La relation *connexité* sur X par rapport à $\mathcal{T}$, notée $\sim$, est celle donnée par

$$x \sim x' \iff \exists A \subset X \text{ tel que } \begin{cases} x, x' \in A \\ (A, \mathcal{T}_A) \text{ est connexe} \end{cases}$$

LEMME 3.2. *La relation de connexité $\sim$ est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. En exercice dans la Série 12. $\square$

DÉFINITION 3.3. Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. La *composante connexe de x* par rapport à $\mathcal{T}$ est sa classe d'équivalence par rapport à $\sim$. On la note C_x.

PROPOSITION 3.4. **Propriétés des composantes.** *Soient $(X,\mathcal{T})$ et $x \in X$. Alors,*

(1) Si on pose $\mathcal{C}_x = \{A \subset X \mid x \in A \text{ et } (A,\mathcal{T}_A) \text{ est connexe}\}$, alors on a
$$C_x = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_x} A\,;$$
(2) $(C_x, \mathcal{T}_{C_x})$ est connexe ;
(3) $C_x = \overline{C_x}$, c'est-à-dire C_x est fermé ;
(4) Si $(X,\mathcal{T})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes distinctes, alors $C_x \in \mathcal{T}$ pour tout $x \in X$.

DÉMONSTRATION. Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et supposons que $x \in X$.

(1) On utilise le principe de la double inclusion.

$(\subset)$: Si $y \in C_x$, alors $y \sim x$ et donc il existe $A \subset X$ tel que $x, y \in A$ et $(A,\mathcal{T}_A)$ soit connexe, ce qui implique que $A \in \mathcal{C}_x$.

$(\supset)$: Si réciproquement $A \in \mathcal{C}_x$ et $y \in A$, alors on aurait $x \sim y$ car $x \in A$ aussi et $(A,\mathcal{T}_A)$ serait connexe. Donc $\bigcup_{A \in \mathcal{C}_x} A \subset C_x$.

Ainsi, on a l'égalité souhaitée $C_x = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_x} A$.

(2) On a $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}_x} A$ et donc $\bigcap_{A \in \mathcal{C}_x} A \neq \emptyset$. Puisque chaque espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe pour $A \in \mathcal{C}_x$, on déduit par la propriété du recollement de la Proposition 1.8 que

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{C}_x} A, \mathcal{T}_{\left(\bigcup_{A \in \mathcal{C}_x} A\right)} \right) = (C_x, \mathcal{T}_{C_x})$$

est aussi connexe, où l'égalité est justifiée par le point (1).

(3) Par le point (2), on sait que $\left(\overline{C_A}, \mathcal{T}_{\overline{C_A}}\right)$ est aussi connexe. Puisque

$$x \in C_A \subset \overline{C_A} \qquad \text{et} \qquad \overline{C_A} \in \mathcal{C}_x$$

on a $\overline{C_x} \subset C_x$. Or on a toujours $A \subset \overline{A}$ pour tout $A \subset X$, on a donc $C_x = \overline{C_x}$.

(4) S'il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \coprod_{i=1}^{n} C_{x_i}$, où le symbole "$\coprod$" dénote la réunion disjointe, alors pour tout $1 \leq j \leq n$, on aurait

$$C_{x_j} = X \backslash \underbrace{\left(\coprod_{i \neq j} C_{x_i} \right)}_{\substack{\text{réunion finie de fermés,} \\ \text{donc fermé}}}$$

donc $C_{x_j} \in \mathcal{T}$.

$\square$

EXEMPLE 3.5. Étudions quelques exemples pour développer l'intuition.

(1) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe et $x \in X$, alors on aurait $C_x = X$, car $x \in X$ et $(X, \mathcal{T})$ est connexe ce qui implique que $X \in \mathcal{C}_x$. On n'a donc qu'une seule composante connexe.

(∞) Si $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ et $x \in X$, alors on aurait $C_x = \{x\}$, car $(\{x\}, \mathcal{T}_{\text{gr}})$ est connexe, tandis que $(\{x, y_1, \ldots, y_k\}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ n'est pas connexe.

(2) Si $\left(\mathbb{Q}, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{\mathbb{Q}}\right)$ et $x \in \mathbb{Q}$, alors $C_x = \{x\}$ car si $x \neq y \in U \in (\mathcal{T}_{\text{st}})_{\mathbb{Q}}$, alors il existerait $V \in \mathcal{T}_{\text{st}}$ tel que $U = V \cap \mathbb{Q}$ et il existerait un $z \in V$ tel que $x < z < y$ avec $z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. On aurait donc une séparation de U

$$(U \cap \,]-\infty; z[) \mid (U \cap \,]z; +\infty[)$$

où $x \in \,]-\infty; z[$ et $y \in \,]z; +\infty[$

Remarque 3.6. Si deux espaces topologiques sont homéomorphes, c'est-à-dire si on a $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$, alors les deux espaces ont le même nombre de composantes connexes distinctes.

Justification. En effet, on pourrait établir une bijection

$$C_x \longmapsto C_{h(x)}$$

et on peut voir que le nombre de composantes doivent être de part et d'autres égales. ✓

Ainsi, si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ n'ont pas le même nombre de composantes, ils ne peuvent pas être homéomorphes.

3.2. Cas connexe par arcs.

Définition 3.7. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La relation *connexe par arcs* $\underset{\text{arc}}{\sim}$ est définie par

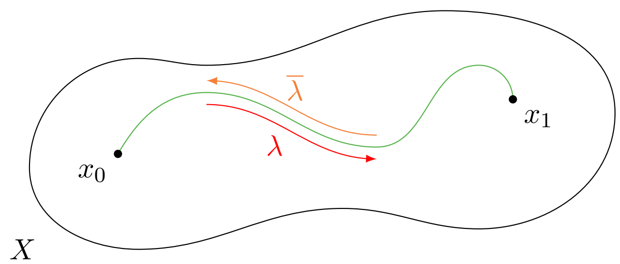
$$x \underset{\text{arc}}{\sim} y \iff \exists \lambda \text{ un chemin de } x \text{ à } y.$$

Lemme 3.8. *La relation connexe par arcs* $\underset{\text{arc}}{\sim}$ *est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Il y a trois propriétés à vérifier.

Réflexivité : On a toujours $x \underset{\text{arc}}{\sim} x$ par le chemin $\mathrm{cst}_x : [0,1] \longrightarrow X$.

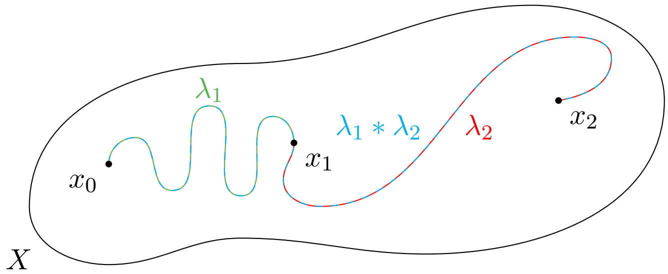
Symétrie : Supposons que $x \underset{\text{arc}}{\sim} y$. Il existe alors un chemin λ qui relie x à y. Le chemin inverse $\overline{\lambda}(t) = \lambda(1-t)$ est aussi un chemin car c'est une composée d'applications continues.



Transitivité : Soient $x_0 \underset{\text{arc}}{\sim} x_1 \underset{\text{arc}}{\sim} x_2$ et les chemins λ_1 qui relie x_0 à x_1 et λ_2 qui relie x_1 à x_2. Alors

$$(\lambda_1 * \lambda_2)(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda_2(t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq 2 \leq 1 \end{cases}$$

est une application continue, car il s'agit d'un recollement d'applications continues et c'est bien un chemin reliant x_0 à x_2. Ainsi, $x_0 \underset{\text{arc}}{\sim} x_2$.



La relation $\underset{\text{arc}}{\sim}$ est donc bien une relation d'équivalence. $\square$

Dans la preuve de la transitivité, on a collé deux chemins. On appelle cela une *concaténation* en mathématiques et cette opération de concaténation sur les chemins ouvre la porte de l'introduction de l'Algèbre dans la Topologie : on pourrait par exemple se demander si cette concaténation est associative, admet un élément neutre, etc.

DÉFINITION 3.9. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. La *composante connexe par arcs* de x est la classe d'équivalence de x par rapport à $\underset{\text{arc}}{\sim}$. On la note P_x.

PROPOSITION 3.10. **Propriétés des composantes connexes par arcs.** *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $x \in X$*.*

(1) Posons $\mathcal{P}_x = \{A \subset X \mid (A, \mathcal{T}_A) \text{ connexe par arcs et } x \in A\}$*. Alors,*

$$P_x = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(x)} A\,;$$

(2) $(P_x, \mathcal{T}_{P_x})$ *est bien connexe par arcs.*

REMARQUE 3.11. Il est important de noter que $P_x \neq C_x$ en général, on a la courbe sinus du topologue comme exemple !

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.10. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et que $x \in X$. On montre d'abord le point (2).

(2) Si $y \in P_x$, alors $x \underset{\text{arc}}{\sim} y$ et il existerait donc un chemin λ de x à y.

(1) On montre par le principe de la double inclusion.

($\subset$) : Si $A \in \mathcal{P}_x$, alors $A \subset P_x$ car pour tout $y \in A$, il existe un chemin λ de x vers y, d'où $x \underset{\text{arc}}{\sim} y$. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{P}_x} A \subset P_x$.

$(\supset)$: Par le point (2), comme $(P_x, \mathcal{T}_{P_x})$ est connexe par arcs, on a $P_x \in \mathcal{P}_x$ et ainsi, $P_x \subset \bigcup_{A \in \mathcal{P}(x)} A$.

$\square$

REMARQUE 3.12. Comme pour le cas des composantes connexes, si $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$, alors les deux espaces ont le même nombres de composantes connexes par arcs.

JUSTIFICATION. En effet, on pourrait établir une bijection entre les ensembles de composantes connexes par arcs

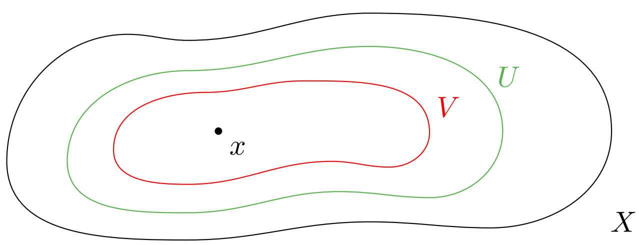
$$P_x \longmapsto P_{h(x)}$$

et on voit qu'ils ont le même nombre de composantes connexes par arcs. ✓

4. Versions locales de la connexité (par arcs)

Pour terminer ce chapitre, on introduit brièvement la *version locale* de la connexité (par arcs). Au lieu d'étudier la connexité (par arcs) de tout l'espace, on se concentrera autour d'un point de l'espace qu'on a choisi. Ce qu'il se passe dans le voisinage d'un point peut en général être très différent de ce qui se passe dans l'espace globalement.

DÉFINITION 4.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Alors $(X, \mathcal{T})$ est *localement connexe (par arcs) en* x si pour tout $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$, il existe $V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in V \subset U$ et $(V, \mathcal{T}_V)$ connexe (par arcs).



Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) en tout $x \in X$, alors on dit qu'il est *localement connexe (par arcs)*.

REMARQUE 4.2. La connexité par arcs locale entraîne la connexité locale.

THÉORÈME 4.3. **Caractérisation de la connexité locale (par arcs).** *Un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *est localement connexe (par arcs) si et seulement si toute composante connexe (par arcs) de tout ouvert* $U \in \mathcal{T}$ *est aussi ouverte.*

Remarque 4.4. Grâce à cette caractérisation, on déduit que si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs), alors toute composante connexe (par arcs) de $(X, \mathcal{T})$ est ouverte.

Corollaire 4.5. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.*

C'est la raison pour laquelle, $\left(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}}\right)$ n'est pas localement connexe par arcs, car elle est connexe, mais pas connexe par arcs !

Lemme 4.6. *La propriété "être localement connexe (par arcs)" est une propriété topologique.*

Exemple 4.7. (0) $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{gr}})$ est localement connexe par arcs.

(∞) $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}})$ est aussi localement connexe par arcs.

(1) $\left(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}}\right)$ n'est pas localement connexe par arcs par le Corollaire 4.5, ni localement connexe car ce n'est pas localement connexe en $(0, 0)$.

Ces notions sont particulièrement utiles pour démontrer la *non-existence* d'homéomorphismes entre espaces topologiques. On peut en effet montrer le résultat suivant.

Proposition 4.8. *On a*

(1) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}}) \ncong (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$;

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}}) \ncong \left((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}), \mathcal{T}_{(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})}\right)$.

Topologie I — Fin !