Topologie 1 (Kathryn Hess)

Rédacteur : Luca Dalmas
Charles Pottier (aide à la rédaction)

September 2025

Contents

1 Les espaces métrqiues

1.1 Notations et rappels

Notation Si X est un ensemble, alors $\#X$ est sa cardinalité.

1.1.1 Rappels d'analyse

• **Métriques sur $\mathbb{R}^n$** Notation : $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d_{euc} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \left[\sum_{i=1}^n (v_i - w_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Propriétés importantes

- Inégalité triangulaire : $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n, d_{euc}(v, w) \leq d_{euc}(v, u) + d_{euc}(u, w)$
- Positivité : $d_{euc}(v, w) = 0 \iff v = w$
- Symétrie $d_{euc}(v, w) = d_{euc}(w, v), \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

1.1.2 Rappels d'algèbre linéaire

• **produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$**

$$< -, - >_{euc}: \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i \end{cases}$$

• **norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$**

$$|| - ||_{euc} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \left(\sum_{i=1}^m v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Remarque 1.1. $||v - w||_{euc} = d_{euc}(v, w)$

1.2 Continuité d'applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

On formule cette notion en termes de d_{euc}

Definition 1.2 (Continuité d'applications)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application, soit $v \in \mathbb{R}^n$. Alors, f est continue en v si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } d_{euc}(v, w) \leq \delta \implies d_{euc}(f(v), f(w)) < \epsilon.$$

On dit simplement que f est <u>continue</u> si elle est continue en $v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.3 (Boules ouvertes)**.** Soient $v \in \mathbb{R}^n, r > 0$. La <u>boule ouverte euclidienne</u> autour de v et de rayon r est

$$B_{euc}(v, r) = \{w \in \mathbb{R}^n | d_{euc}(v, w) < r\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.4 (Caractérisation de la continuité)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Alors*[1]

$$f \text{ est continue } \iff \forall w \in \mathbb{R}^m, \forall r > 0, \forall v \in f^{-1}(B_{euc}(w, r)), \exists s > 0 \text{ t.q. } B_{euc}(v, s) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(w, r)).$$

Preuve. $\Longleftarrow$ Soit $v \in \mathbb{R}^n$, soit $\epsilon > 0$.
Observons que :

$$d_{euc}(f(v), f(w)) < \epsilon \iff f(w) \in B_{euc}(f(v), \epsilon)$$
$$d_{euc}(v, w) < \delta \iff w \in B_{euc}(\delta)$$

Donc on veut trouver $\delta > 0$ t.q.

$$w \in B_{euc}(v, \delta) \implies f(w) \in B_{euc}(f(v), \epsilon)).$$

Or

$$f(w) \in B_{euc}(f(v), \epsilon) \iff w \in f^{-1}(B_{euc}(f(v), \epsilon))$$

Donc on veut montrer que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } w \in B_{euc}(v, \delta) \implies w \in f^{-1}(B_{euc}(f(v), \epsilon))$$

Par hypothèse :

$$\forall u \in f^{-1}(B_{euc}(f(v), \epsilon)), \exists s > 0 \text{ t.q. } B_{euc}(u, s) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(f(v)), \epsilon)$$

Donc en particulier pour $u = v$,

$$\exists \delta > 0, \text{ t.q. } B_{euc}(v, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(f(v), \epsilon)).$$

$\Longrightarrow$ Soient $w \in \mathbb{R}^m, r > 0$ et $v \in f^{-1}(B_{euc}(w, r))$. Par définition de la pré-image, $d_{euc}(w, f(v)) < r$. Poser $\epsilon = r - d_{euc}(w, f(v)) > 0$.

Par hypothèse (donc par continuité de f),

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } u \in B_{euc}(v, \delta) \implies f(u) \in B_{euc}(f(v), \epsilon)$$

On veut alors montrer $u \in f^{-1}(B_{euc}(w, r))$, car on pourra ensuite conclure que

$$B_{euc}(v, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{euc}(w, r)).$$

Or

$$u \in f^{-1}(B_{euc}(w, r)) \iff f(u) \in B_{euc}(w, r).$$

Par l'inégalité triangulaire

$$d_{euc}(w, f(u)) \leq d_{euc}(w, f(v)) + d_{euc}(f(v), f(u))$$

$$< d_{euc}(w, f(v)) + \epsilon = r,$$

par notre choix de ϵ
Donc $u \in f^{-1}(B_{euc}(w, r))$. □

[1] Rappel sur la pré-image : Si $g : X \to Y$ une application et $W \subseteq Y$, alors $g^{-1}(W) = \{x \in X | g(x) \in W\} \subseteq X$ est la pré-image de W

1.3 Propriétés élémentaires et exemples d'espaces métriques

Definition 1.5 (Métrique)**.** [2] Soit X un ensemble. Une métrique sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes

M1 $d(x, x') = 0 \iff x = x', \forall x, x' \in X$ (positivité)

M2 $d(x, x') = d(x', x), \forall x, x' \in X$ (symétrie)

M3 $d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x'', x'), \forall x, x', x'' \in X$ ($\neq \Delta$)

Le couple (X, d) est appelé un espace métrique.

Lemme 1.6 (Positivité d'une distance)**.** *Soit* (X, d)*, un espace métrique. Alors*

$$d(x, x') \geq 0, \quad \forall x, x' \in X.$$

Preuve. $\forall x, x' \in X$, on a

$$0 =^{(M1)} d(x, x) \leq^{(M3)} d(x, x') + d(x', x) =^{(M2)} 2d(x, x')$$

d'où $d(x, x') \geq 0$ □

Terminologie Un espace métrique (X, d) est dit borné si :

$$\exists N > 0 \text{ t.q. } d(x, x') \leq N \quad \forall x, x' \in X$$

Exemple 1.7.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $< -, - >: V \times V \to \mathbb{R}$. Alors il existe une métrique sur V définie par

$$d_{<-,->} : \begin{cases} V \times V \to \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto < v - w, v - w >^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

2. Soit $G = (V, E)$ un graphe[3]. On peut définir une métrique sur le graphe comme suit.
   On définit un chemin de v à w est une suite de sommets

$$(v_0, ..., v_n), \text{ t.q. } v_0 = v, v_n = w \text{ et } \{v_i, v_{i+1}\} \in E, \forall i.$$

   On pose alors

$$d_G : \begin{cases} V \times V \to \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto d_G(v, w) = \inf\{n | \exists \text{ chemin } (v_0, ..., v_n) \text{ de } v \text{ à } w\} \end{cases}$$

3. Soit A un ensemble, un *alphabet*. Soit $n \geq 0$, un nombre naturel.
   On pose $W_n(A) = \{a_1 a_2 ... a_3 | a_i \in A\}$ l'ensemble des mots de longueur n dans l'alphabet A.
   La métrique de Hamming sur $W_n(A)$ est définie comme

$$d_H : \begin{cases} W_n(A) \times W_n(A) \to \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto \#\{i | a_i \neq b_i\} \end{cases}$$

[2] Rappel : Si X, Y sont des ensembles, alors leur produit cartésien est : $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$

[3] C'est-à-dire que V est un ensemble dont les éléments sont appelés les *sommets* de G et E est un ensemble de parties de cardinalité 2 de V, appelés des *arêtes* (c'est-à-dire $E \subseteq V \times V$).

4. Soit (X, d), un espace métrique et soit W, un ensemble.
   On pose :
   $$\mathcal{F}(W, X) = \{f : W \to X \mid f \text{ application}\}$$
   La <u>distance uniforme</u> sur $\mathcal{F}(W, X)$ induite par d est
   $$d_{unif} : \begin{cases} \mathcal{F}(W, X) \times \mathcal{F}(W, X) \to \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \sup_{w \in W} d(f(w), g(w)) \end{cases}$$

Remarque 1.8. Si A est fini, alors $W_n(A)$ est fini également. De la même manière, si X, W sont tous 2 finis, alors $\mathcal{F}(W, X)$ est aussi fini.
En supposant que W soit infini, alors, on pourrait supposer (X, d) borné pour éviter que le sup ne tende vers l'infini
Si (X, d) est un espace métrique et X est fini, on peut écrire $X = \{x_1, ..., x_n\}$ et associer à d une matrice $M(d)$ de taille $n \times n$ où
$$M(d)_{ij} = d(x_i, x_j), \quad M(d) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$$
qui est, symétrique $(M2)$ et de diagonale nulle $(M1)$

Remarque 1.9. Certains exemples (ici le 3 et le 4) illustrent qu'une métrique mesure "similitude" ou "ressemblance"

1.4 Construction d'espaces métriques

1.4.1 Sous-espaces métriques

Soit (X, d), un espace métrique et soit $Y \subseteq X$.
Puisque $Y \times Y \subseteq X \times X$, on peut considérer
$$d|_{Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$$
Il s'agit bien d'une métrique sur Y, car les axiomes $(M1) - (M3)$ sont vérifiées $\forall x \in X$, ils le sont en particulier $\forall x \in Y$.
On dit alors que $(Y, d|_{Y \times Y})$ est un sous-espace métrique de (X, d).

Exemple 1.10. On peut construire les sous-espaces métriques suivants

- $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_{euc}$, $Y = S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, alors $d_{euc}|_{S^1 \times S^1}$ reste une métrique.
- $X = W_n(A)$, A =alphabet latin, $Y = \{a_1, ..., a_n \in W_n(A) | a_1 ... a_n \text{vrais mots anglais}\}$

1.4.2 Produits d'espaces métriques

Soient $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ des espaces métriques.
Comment définir une métrique sur $X_1 \times ... \times X_n$ à partir de $d_1, ... d_n$
Remarquons que nous avons l'équivalence
$$(X_1 \times ... \times X_n) \times (X_1 \times ... \times X_n) \to \mathbb{R} \simeq (X_1 \times X_1) \times (X_2 \times X_2) \times ... \times (X_n \times X_n) \to \mathbb{R}$$
On peut alors créer l'application
$$\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, x_i')^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
qui est une métrique bien définie

1.5 Applications entre espaces métriques

But : Pouvoir comparer les espaces métriques et à quel point ils se ressemblent ? En quoi différent-ils ?

Du plus restrictif au plus général : Soient $(X, d_Y), (Y, d_Y)$ des espaces métriques et $f : X \to Y$, une application

Definition 1.11 (Tout préserver)**.** f préserve les distances si $d_x(x, x') = d_y(f(x), f(x'))$[4].
Si f préserve les distances et est surjective (donc bijective), alors f est une isométrie

Exemple 1.12. $A = \{a, b\}, W_2(A) = \{aa, ab, ba, bb\} + d_H$ admet une isométrie avec le graphe définit par $G = (V, E) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$ munie de l'application distance chemins.
On commence par remarquer que

$$\#W_2(A) = 4 = \#V$$

Décrivons alors la matrice de l'application distance sur W_2

$$d_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis l'application distance sur d_{chemin}

$$d_{chemin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est alors assez facile de définir une isométrie

$$f : \begin{cases} aa \mapsto 1 \\ ab \mapsto 2 \\ ba \mapsto 3 \\ bb \mapsto 4 \end{cases}$$

Definition 1.13 (Changement d'échelle)**.** Soit $K \in \mathbb{R}, K > 0$, f est $K-$Lipschitz si $d_y(f(x), f(x')) \leq K \cdot d_x(x, x'), \forall x, x' \in X$

Exemple 1.14. Soit (X, d), un espace métrique. Soit W, un ensemble fini. Soit $w_0 \in W$. Définit

$$ev_{w_0} : \begin{cases} \mathcal{F}(W, X) \to X \\ f \mapsto f(w_0) \end{cases}$$

Alors, ev_{w_0} est une application $1-$Lipschitz par rapport à d_{unif} sur $\mathcal{F}(W, X)$ et d sur X car

$$d_x(f(w_0), g(w_0)) \leq \sup_{w \in W} d_x(f(w), g(w)) = d_{unif}(f, g)$$

Definition 1.15 (Continuité (par rapport à une métrique))**.** L'application $f : X \to Y$ est continue (par rapport à d_x et d_y) si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } d_x(x, x') < \delta \implies d_y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

[4]Si f préserve les distances, alors, f est injective. Si $f(x) = f(x')$ alors $d_y(f(x), f(x')) = 0$, d'où $d_x(x, x') = 0$ et donc, par $(M1)$, $x = x'$

Comme dans le cas euclidien, on peut formuler cette définition à l'aide des boules ouvertes

Definition 1.16 (Les boules ouvertes)**.** Soit (X, d), un espace métrique et soient $x \in X, r > 0$
La boule ouverte de rayon r et centrée en x (par rapport à d) est

$$B_d(x, r) = \{x' | d(x, x') < r\}$$

Proposition 1.17 (Caractérisation de la continuité)**.** *Soient (X, d_x) et (Y, d_y), des espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est continue (par rapport à d_x et d_y) ssi*

$$\forall y \in Y, \forall r > 0, \forall x \in f^{-1}(B_{d_y}(y, r)), \exists s > 0 \ t.q. \ B_{d_x}(x, s) \subseteq f^{-1}(B_{d_y}(y, r))$$

Preuve. La preuve étant similaire à la preuve de 1.4 Caractérisation de la continuité, elle est laissée en exercice. □

Relations entre les différents types d'applications On peut établir le rapport suivant :

$$\text{Isométries} \implies \text{Préserve les distances} \implies \text{Lipschitz} \implies \text{Continues}$$

2 Axiomatique de la topologie

2.1 Notions fondamentales

Le but de ce chapitre est d'axiomatiser le cadre qui nous permet de parler continuité d'applications.

2.1.1 Topologies, bases, sous-bases

Notations : Soit X un ensemble. Alors $\mathcal{P}(x) =$ l'ensemble de toutes les parties de $X =$ "power set of X".

Definition 2.1. Soit X, un ensemble. Une topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les axiomes suivantes :

T1 $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

T2 $\forall \{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(\forall I)$

T3 $\forall \{U_1, \ldots, U_n\}$, $\bigcap_{i=1}^{n} u_i \in \mathcal{T}(\forall n \in \mathbb{N})$

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique. Les éléments U de $\mathcal{T}$ sont des ouverts de $(X, \mathcal{T})$

Exemple 2.2 (Topologies admises pour tout ensemble X)**.**

1. La topologie la plus petite (minimale) pour X est appelée topologie grossière notée $\mathcal{T}_{gr} = \{\emptyset, X\}$
2. La topologie maximale sur X est appelée topologie discrète, notée $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$
3. La topologie du complément fini est notée

$$\mathcal{T}_{comp} = \{U \subseteq X : \#(X \backslash U) < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

(T1) est vérifiée trivialement
(T2) est vérifié comme suit : si $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_{comp}$, alors

$$X \backslash (\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcap_{i \in I} (X \backslash U_i) < \infty \implies \bigcup_{i \in I} \in \mathcal{T}_{comp}$$

Finalement, (T3) est vérifié : si $\{U_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{T}_{comp}$ alors

$$X \backslash (\bigcap_{i=1}^{n} U_i) = \bigcup_{i=1}^{n} X \backslash U_i$$

alors

$$\#(X \backslash (\bigcap_{i=1}^{n} U_i)) = \#(\bigcup_{i=1}^{n} X \backslash U_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \#(X - U_i) < \infty$$

Alors $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_{comp}$ et $\mathcal{T}_{comp}$ est bien une topologie.

Terminologie Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, des topologies sur X. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, on dit que $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$ (ou que $\mathcal{T}$ est plus petite que $\mathcal{T}'$).
Cependant, en général pour $\mathcal{T}$,$\mathcal{T}'$ des topologies sur X, on a $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}' \nsubseteq \mathcal{T}$ et on dit alors qu'elles sont incomparables.

Exemple 2.3 (Exemples d'espaces topologiques finis)**.**

- Si $X = \emptyset$, alors la seule topologie est $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$
- si $X = \{x\}$, alors $\mathcal{T}_{gr} = \{\emptyset, \{x\}\} = \mathcal{T}_{disc}$ donc toute topologie sur $\{x\}$ est de la forme $\{\emptyset, \{x\}\}$
- $X = \{x, y\}$, $\mathcal{T}_{gr} = \{\emptyset, \{x, y\}\}$ et $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}, \{y\}\}$ mais on voit que l'on peut également construire 2 topologies $\mathcal{T}_x = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$ et $\mathcal{T}_y = \{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}$ qui sont incomparables.

Definition 2.4. Soit X un ensemble. Une base de topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les axiomes suivants

B1 $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B (\iff \forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B)$

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.q $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Remarque 2.5. Si $\mathcal{T}$ est une topologie, alors $\mathcal{T}$ est aussi une base de topologie.

B1 Par (T_1) : $X \in \mathcal{T}$ donc $\bigcup_{U \in \mathcal{T}} U = X$

B2 Par $(T3)$: $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ on a $U_3 := U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ alors pour tout $x \in U_1 \cap U_2$ on a bien $x \in U_3$

Lemme 2.6. *Soit $\mathcal{B}$ une base de topologie sur un ensemble X. On pose*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \ t.q. \ x \in B \subseteq U\}$$

Alors, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est une topologie X appelée la topologie engendrée par $\mathcal{B}$

Remarque 2.7 (Reformulation d'une topologie de base). On a en fait la reformulation

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$$

l'ensemble de toutes les réunions possibles d'éléments de la base $\mathcal{B}$. Voyons que cette reformulation est équivalente.

Soit $U \subseteq X$, alors

$$\forall x \in U, \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ t.q. } x \in B_x \subseteq U \iff U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

car

$$B_x \subseteq U \implies \bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U \quad \text{et} \quad x \in B_x, \forall x \in U \implies U \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x$$

Preuve.

T1 Par $(B1)$, on a que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ et, par la remarque 2.7 , on pose $\emptyset = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ alors $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

T2 Soit $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. On veut montrer que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, alors, $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme $U_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en utilisant la remarque 2.7 , $\exists \mathcal{A}_{i_0} \subseteq \mathcal{B}$ tel que $U_{i_0} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_{i_0}} B$.
On peut alors poser

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B} \quad \text{alors} \quad \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{B \in A_i} B = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$$

T3 Soit $\{u_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$, on veut montrer, par récurrence sur n, que

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$$

où le cas $n = 1$ est trivialement résolu, on se concentre alors sur $n = k$. On cherche à montrer que

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} U_i = (\bigcap_{i=1}^{k} U_i) \cap U_{k+1} \in \mathcal{T}_\mathcal{B} \quad \text{en supposant} \quad \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} U_i$, par hypothèse, on sait que

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}_\mathcal{B} \quad \text{et} \quad U_{k+1} \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$$

Alors,

$$\exists B_{1x}, B_{2x} \in \mathcal{B} \quad \text{t.q.} \quad x \in B_{1x} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} U_i \text{ et } x \in B_{2x} \subseteq U_{k+1} \quad \text{alors} \quad x \in B_{1x} \cap B_{2x}$$

par l'axiome $(B2)$, on a que

$$\exists B_{3x} \in \mathcal{B} \text{ t.q. } x \in B_{3x} \subseteq B_{1x} \cap B_{2x} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} U_i$$

et comme x est arbitraire, on a bien que

$$U := \bigcap_{i=1}^{k+1} U_i \subseteq \bigcup_{x \in U} \underbrace{B_{3x}}_{\subseteq U} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} U_i \implies \bigcap_{i=1}^{k+1} U_i = \bigcup_{x \in U} B_{3x} \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$$

Donc, par récurrence, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_\mathcal{B}, \forall \{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$

□

Remarque 2.8. On peut constater, sans mal, les implications suivantes si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de topologies.

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \implies \mathcal{T}_\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$
- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{B}$
- Si $\mathcal{T}$ est une topologie vue comme base de topologie, alors $\mathcal{T}_\mathcal{T} = \mathcal{T}$, car toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.

Exemple 2.9.

1. $\{X\}$ est une base de $\mathcal{T}_{gr}$
2. $\{\{x\} : x \in X\}$ est une base de $\mathcal{T}_{disc}$

Lemme 2.10. *Si* (X, d) *est un espace métrique, alors,* $\mathcal{B}_d = \{B_d(x, r) : x \in X, r > 0\}$ *est une base de topologie sur* X

Remarque 2.11. $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$ est appelée la topologie engendrée par la mesure d

Preuve.

B1 $\forall r > 0, x \in B_d(x, r)$ et donc $X = \bigcup_{x \in X} B_d(x, r)$

B2 Soient $x_1, x_2 \in X$ et r_1, r_2, alors, on pose $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ et on voit que si on définit

$$0 < r < \min\{r_1 - d(x_1, x), r_2 - d(x_2, x)\}$$

on a $x \in B(x, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$

□

Definition 2.12. Soit X, un ensemble, une sous-base de topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(x)$ t.q.

S1 $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$

Remarque 2.13. Toute base de topologie est une sous base de topologie car (S1)=(B1)

Lemme 2.14. *Si* $\mathcal{S}$ *est une sous-base de topologie sur* X*, alors*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{S_1 \cap \cdots \cap S_n : S_i \in \mathcal{S}, \forall i \leq n \in \mathbb{N}\}$$

est une base de topologie

Preuve.

B1 Directement impliqué par $(S1)$

B2 On voit que $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, on a bien que $S_3 = S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$ et donc on peut poser $x \in S_3 \subseteq S_1 \cap S_3$ pour satisfaire $(B2)$.

□

Lemme 2.15 (Lemme de comparaison de base)**.** *Soit* X*, un ensemble, et soit* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$*,* 2 *bases de topologie sur* X*. Alors,*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \iff \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ t.q. } x \in B' \subseteq B \tag{1}$$

Preuve.

$\Longrightarrow$ On voit que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}'_{\mathcal{B}'}$ alors, par la remarque 2.7, on a que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \exists \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}' \text{ t.q. } B = \bigcup_{B' \in \mathcal{A}'} B'$$

Alors,

$$\forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{A}' \text{ t.q. } x \in B' \subseteq B$$

$\Longleftarrow$ Remarquons qu'en utilisant l'hypothèse 1, on peut écrire

$$\forall B \in \mathcal{B}, \exists \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}' \text{ t.q. } B = \bigcup_{B' \in \mathcal{A}'} B'$$

alors on sait que $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ par la remarque 2.7.
Il est à présent facile de remarquer que

$$\forall U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \text{ on a } U = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ avec } B_i \in \mathcal{B} \text{ alors } B_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \implies U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$$

et on conclu $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$

□

Lemme 2.16 (Lemme de test de base)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace topologique et soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$. Alors*

$$\mathcal{C} \textit{ est une base de topologie et } \mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T} \iff \forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists C \in \mathcal{C} \textit{ t.q. } x \in C \subseteq U$$

Preuve.

" $\implies$ " Par définition, on considère $\mathcal{C}$ comme base de topologie alors $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T}$.

" $\Longleftarrow$ " Commençons par montrer que $\mathcal{C}$ est une base topologie.

B1 L'hypothèse nous dit que

$$\forall U \in \mathcal{T}, \exists \{C_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{C} \text{ t.q. } U = \bigcup_{i \in I} C_i$$

En particulier, par $(T1)$, on a que $X \in \mathcal{T}$ et

$$\exists \{C_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{C} \text{ t.q. } X = \bigcup_{i \in I} C_i$$

B2 Voyons que $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ on a $C_1, C_2 \in \mathcal{T}$, alors, par $(T3)$, $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{T}$. Par hypothèse,

$$\forall x \in C_1 \cap C_2, \exists C_3 \in \mathcal{C} \text{ t.q. } x \in C_3 \subseteq C$$

alors $\mathcal{C}$ est bien une base de topologie.

Il reste à montrer que les 2 topologies sont bien égales.
La remarque 2.7 nous permet d'écrire

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \{\bigcup_{i \in I} C_i : C_i \in \mathcal{C}, \forall i \in I \text{ quelconque}\}$$

et, comme $C \in \mathcal{T}$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, par $(T2)$, on a bien que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \{\bigcup_{i \in I} C_i : C_i \in \mathcal{C}, \forall i \in I \text{ quelconque}\} \subseteq \mathcal{T}$$

Et, on a déjà montré que

$$\forall U \in \mathcal{T}, \exists \{C_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{C} \text{ t.q. } U = \bigcup_{i \in I} C_i$$

alors on a bien $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ ce qui montre l'égalité

□

Lemme 2.17. *Soit X, un ensemble, et soit $\mathcal{S}$ une sous-base de topologie sur X. Alors,*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\bigcap_{i=1}^{n} S_i | S_i \in \mathcal{S}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

est une base de topologie.

Preuve.

B1 Vérifié directement par $(S1)$

B2 On voit que

$$B = \bigcap_{i=1}^{m} S_i, B' = \bigcap_{j=1}^{n} S'_j \implies B \cap B' = \bigcap_{i=1}^{m} S_i \cap \bigcap_{j=1}^{n} S'_j \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$$

□

Remarque 2.18. Toute topologie sur X est comprise dans une base de topologie sur X qui est elle-même comprise dans une sous-base de topologie de X.

2.1.2 Applications continues

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des applications entre espaces topologiques qui "préservent" leur structure essentielle, c-à-d les ouverts afin de comparer les espaces topologiques entre eux.

Definition 2.19 (Continuité)**.** Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Une application $f : X \to X'$ est continue par rapport aux topologies $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ si $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}, \forall U' \in \mathcal{T}'$. On écrit alors $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue.

Definition 2.20 (Continuité locale)**.** Soit $x \in X$. L'application $f : X \to X'$ est continue en x par rapport à $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ si $\forall U' \in \mathcal{T}'$ t.q. $f(x) \in U', \exists U \in \mathcal{T}; x \in U \subseteq f^{-1}(U')$

Lemme 2.21. *Sous les conditions de la définition :*

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}') \text{ est continue } \iff f \text{ est continue en } x, \forall x \in X$$

Preuve.

" $\implies$ " Soient $x \in X$ et $U' \in \mathcal{T}'$ tels que $f(x) \in U'$. Comme $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, on a que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. On peut alors poser $U = f^{-1}(U')$ et on a bien que $x \in U \subseteq f^{-1}(U')$

" $\impliedby$ " Soit $U' \in \mathcal{T}'$, et montrons que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Commençons par voir que si $f^{-1}(U') = \emptyset$, alors clairement, $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Sinon, posons $x \in f^{-1}(U')$.
On a alors $f(x) \in U'$, et, par hypothèse,

$$\exists U_x \in \mathcal{T} \text{ t.q. } x \in U_x \subseteq f^{-1}(U')$$

Alors, on peut poser

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{x \in f^{-1}(U')} U_x \in \mathcal{T} \text{ par } (T2)$$

$\square$

Remarquons cependant que vérifier la continuité en chaque point peut être très long et fastidieux, nous allons alors introduire une utilité des sous-bases de topologies

Lemme 2.22. *Soient* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$, *des espaces topologiques et soit* $\mathcal{S}'$, *une sous-base de* $\mathcal{T}'$ *(autrement dit,* $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}'}}$*). Alors, une application* $f : X \to X'$ *est continue par rapport à* $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ *ssi* $f^{-1}(S') \in \mathcal{T}, \forall S' \in \mathcal{S}$.

Remarque 2.23. Puisque toute base de topologie est une sous-base, par le lemme, si $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{T}'$, alors $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continue $\iff f^{-1}(B') \in \mathcal{T}, \forall B' \in \mathcal{B}'$

Preuve.

" $\Longrightarrow$ " Comme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}$ et f est continue par rapport à $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, alors on a directement que

$$f^{-1}(S) \in \mathcal{T}, \quad \forall S' \in \mathcal{S}'$$

" $\Longleftarrow$ " On veut montrer que $\forall U' \in \mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}, f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$.
Commençons par remarquer que si on prend la base $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ engendrée par $\mathcal{S}$, on a que

$$\forall U' \in \mathcal{T}'_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}}, \exists \{B_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \text{ t.q. } U' = \bigcup_{i \in I} B_i$$

et, de la même manière

$$\forall B_i \in \mathcal{B}, \exists n \in \mathbb{N}, \{S'_{i,1}, \ldots, S'_{i,n}\} \subseteq \mathcal{S}' \text{ t.q. } B_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} S'_{i,j}$$

On remarque alors que

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = \underbrace{\bigcup_{i \in I} \underbrace{\bigcap_{j=1}^{n_i} \underbrace{f^{-1}(S'_{i,j})}_{\in \mathcal{T} \text{ par hyp.}}}_{\in \mathcal{T} \text{ par } (T2)}}_{\in \mathcal{T} \text{ par } (T3)} \in \mathcal{T}$$

$\square$

Remarque 2.24.

- Si $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{gr} = \{\emptyset, X'\}$, alors f est toujours continue car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ et $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{T}$ par $(T1)$.
- Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$ alors f est toujours continue par $\forall u' \in f^{-1}(U') \subseteq X$ autrement dit: $f^{-1}(u') \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{disc}$
- Si $f = Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$, alors f est continue ssi $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
- Pour $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ quelconque, si on prend $x'_0 \in X'$,

$$cst_{x'_0} : \begin{array}{rl} X \to & X' \\ x \to & x'_0 \end{array}$$

est toujours continue

Proposition 2.25 (Continuité métrique / topologique)**.** *Soient $(X,d),(X',d')$ deux espaces métriques, on a que*

$$f:(X,d)\to(X',d') \text{ continue (métrique)} \iff f:(X,\mathcal{T}_d)\to(X',\mathcal{T}_{d'}) \text{ continue (topologique)}$$

Preuve.

" $\Longrightarrow$ " Commençons par rappeler que $\{B_{d'}(x',r) : x'\in X', r>0\}$ est une base (et en particulier une sous-base) de topologie de $\mathcal{T}_{d'}$, alors, par le lemme précédent, il suffit de montrer que $f^{-1}(B_{d'}(x',r))\in\mathcal{T}_d$.
Par définition de la continuité métrique, on a que

$$\forall x\in f^{-1}(B_{d'}(x',r)), \exists s_x>0 \text{ t.q. } B_d(x,s_x)\subseteq f^{-1}(B_{d'}(x',r))$$

D'où

$$f^{-1}(B_{d'}(x',r)) = \bigcup_{x\in f^{-1}(B'_d(x',r))} B_d(x,s_x)\in T_{\mathcal{B}_d}=\mathcal{T}_d$$

" $\Longleftarrow$ " On cherche à montrer que

$$\forall B_{d'}(x',r)\subseteq X', \forall x\in f^{-1}(B_{d'}(x',r)), \exists s>0 \text{ t.q. } B_d(X,s)\subseteq f^{-1}(B_{d'}(x',r))$$

Or, on sait que

$$f:(X,\mathcal{T}_d)\to(X',\mathcal{T}_{d'}) \text{ est continue } \implies f^{-1}(B_{d'}(x',r))\in\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d}$$

Par définition de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{d'}}$, on sait que

$$\forall x\in f^{-1}(B_{d'}(x',r)), \exists B_d(y,s)\subseteq X \text{ t.q. } x\in B_d(y,s)\subseteq f^1(B_{d'}(x',r))$$

On peut alors poser $t=s-d(x,y)$ et finalement,

$$B_d(x,t)\subseteq B_d(y,s)\subseteq f^{-1}(B_{d'}(x',r))$$

Ce qui montre la continuité métrique

□

Lemme 2.26. *Toute composée d'applications continues est continue.*

Preuve. Soient $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}'),(X'',\mathcal{T}'')$ des espaces topologiques et $X\xrightarrow{f}X', X'\xrightarrow{g}X''$ des applications continues. Soit $U''\in\mathcal{T}$, alors

$$(g\circ f)^{-1}(U'') = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U'')}_{\in\mathcal{T}' \text{ car } g \text{ continue}})}_{\in\mathcal{T} \text{ car } f \text{ est continue}}$$

alors, $(g\circ f)$ est effectivement continue. □

Definition 2.27. Un homéomorphisme de $(X,\mathcal{T})$ vers $(X',\mathcal{T}')$ est une application $h:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ telle que il existe une application $k:(X',\mathcal{T}')\to(X,\mathcal{T})$ telles que

- h est continue
- k est continue
- $k\circ h = Id_X$
- $h\circ k = Id_{X'}$

Remarque 2.28 (Terminologie / Notation). S'il existe un homéomorphisme $h:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$, alors $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ sont homéomorphes, noté $(X,\mathcal{T})\simeq(X',\mathcal{T}')$. Les topologues s'intéressent aux propriétés d'espaces topologiques qui sont préservées sous homéomorphismes appelées des propriétés topologiques

2.1.3 Sous-espaces topologiques

Soient $(X, \mathcal{T})$, un espace topologique, $Y \subseteq X$ et l'inclusion

$$\iota_Y : \begin{array}{rl} Y \to & X \\ y \mapsto & X \end{array}$$

Lemme 2.29. *Si $\mathcal{T}'$ est une topologie sur Y, alors, ι est continue ssi $U \cap Y \in \mathcal{T}'$ pour tout $U \in \mathcal{T}$*

Preuve. $\forall A \subseteq X, \iota^{-1}(A) = A \cap Y$, donc, en particulier, $\forall u \in \mathcal{T}$, $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ □

Corollaire 2.30. *La plus petite topologie $\mathcal{T}'$ sur Y telle que $\iota(Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ soit continue est appelée la topologie de sous-espace :*

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$$

Remarque 2.31. La "plus petite topologie" est telle qu'elle est contenue dans toutes les autres topologies.

Preuve. Par le lemme, si $\mathcal{T}'$ est la plus petite topologie telle que ι est continue, alors, $\{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{T}'$. On doit alors montrer que $\mathcal{A} = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$ est bien une topologie.

T1

$$\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{A}, Y = X \cap Y \in \mathcal{A}$$

T2

$$\forall \{U_i \cap Y | i \in I, U_i \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{A}, \text{ on a}$$
$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = (\underbrace{\bigcup_{i=1} U_i}_{\in \mathcal{T} \text{ car (T2)}}) \cap Y \in \mathcal{A}$$

T3

$$\forall \{U_1 \cap Y, \ldots, U_n \cap Y | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) = (\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} U_i}_{\in \mathcal{T} \text{ par (T3)}}) \cap Y \in \mathcal{A}$$

Ce qui montre que $\mathcal{A}$ est bien une topologie. □

Remarque 2.32. On introduit la notation pour toute application $f : X \to X'$ avec $Y \subseteq X$, on note

$$f|_Y := f \circ \iota_Y : Y \to X$$

Proposition 2.33. *Soient $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques, et soit $Y \subseteq X$. Soit $f : X \to X'$ une application et $Z \subseteq X'$ t.q. $Im(f) \subseteq Z$. Si f est continue, alors*

1. $f|_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X', \mathcal{T}')$ *continue*
2. $f|^Z : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'_Z)$ *continue*[5]

[5] $f|^Z$ est en fait la restriction du codomaine

Preuve.

1. f devient
$$f \circ \iota_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{\iota} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f} (X', \mathcal{T}')$$
comme f et ι sont des fonctions continues, la composition des 2 fonctions est également continue.
2. On se représente la situation de la manière suivante
$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{T}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f|^Z"'] & & (X',\mathcal{T}') \\ & (Z, \mathcal{T}'_Z) \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$
On sait qu'on a la définition de la topologie de sous-espace pour Z :
$$\mathcal{T}'_Z = \{U' \cap Z | U' \in \mathcal{T}'\}$$
Comme f est continue, on sait que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Par construction :
$$Im(f) \subseteq Z, f^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U')$$
Donc
$$(f|^Z)^{-1}(U \cap Z) = f^{-1}(U' \cap Z) = f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$$
et $f|^Z$ est bien continue.

$\square$

Exemple 2.34.
$$f : \begin{array}{cc} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & x^2 \end{array}$$
est évidemment continue selon la topologie euclidienne donc
$$f|^{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \begin{array}{cc} \mathbb{R} \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto & x^2 \end{array}$$
est également continue.

Lemme 2.35 (Lemme du recollement)**.** *Soient $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques et $f : X \to X'$, une application. S'il existe $\{U_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ tel que*

- $\bigcup_{i \in I} U_i = X$
- $f|_{U_i} : (U_i, \mathcal{T}_{U_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continue.*

Alors f est continue

Preuve. On pose $f_i := f|_{U_i}$ et $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{U_i}$. Soit $U' \in \mathcal{T}$, on définit $V_i = U_i \cap f^{-1}(U')$, on a alors que
$$V_i = U_i \cap f^{-1}(U') = f_i^{-1}(U') \in \mathcal{T}_i$$
où la dernière égalité est justifiée car f_i est continue. On peut donc écrire
$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U')$$
Or, on sait que $V_i \cap U_i \in \mathcal{T}$ par la topologie de sous-espace et $\bigcup_{i \in I}(V_i \cap U_i) \in \mathcal{T}$ par $(T3)$ alors f est bien continue $\square$

Exemple 2.36. $X =]-2,-1[\cup]1,2[\subset \mathbb{R}$. $(X, (\mathcal{T}_{st})_X)$

$$f : \begin{array}{rcl} (X,\mathcal{T}) & \to & (\mathbb{R},\mathcal{T}_{st}) \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 : -2 < x < -1 \\ e^x : 1 < x < 2 \end{cases} \end{array}$$

$U_1 =]-2,-1[, U_2 =]1,2[$ $f|_{U_1}(x) = x^2, f|_{U_x}(x) = e^x$ continues, alors f est continue.

2.1.4 Autour de la notation de fermé

Definition 2.37. Soit $(X,\mathcal{T})$, un espace topologique. Un sous-ensemble $X \subseteq \mathcal{T}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}$ s'il existe $U \in \mathcal{T}$ t.q. $C = X \backslash U$

Exemple 2.38.

- Pour la topologie $(X,\mathcal{T}_{gr})$, $\emptyset, X$ sont ouverts et fermés
- Pour la topologie $(X,\mathcal{T}_{disc})$ tout sous-ensemble de X est ouvert et fermé par rapport à $\mathcal{T}_{disc}$

Proposition 2.39 (Propriétés élémentaires des fermés)**.** *Soit* $(X,\mathcal{T})$ *un espace topologique*

F1 $\emptyset, X$ *fermés par rapport à* $\mathcal{T}$

F2 Toute intersection de fermés est fermée et $X\backslash(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I}(X\backslash U_i)$

F3 Toute réunion fermé de fermés est fermée. et $X\backslash(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(X\backslash U_i)$

Question Comment trouver l'ouvert et le fermé les "plus proches" à un sous-ensemble quelconque

Definition 2.40. Soit $(X,\mathcal{T})$, un espace topologique, soit $A \subseteq X$,

- L'adhérence de A est $\bar{A} = \cap C$ où on définit $\{A \subseteq C | C$ fermés par rapport à $\mathcal{T}\}$
- l'intérieur de A est $Int(A) = \mathring{A} = \bigcup U$ où on définit $\{U \subseteq A | U \in \mathcal{T}\}$

Remarque 2.41.

- $Int(A) \subseteq A \subseteq \bar{A}$
- Si A est fermé, alors $A = \bar{A}$
- SI A est ouvert, alors $A = Int(A)$

Proposition 2.42 (Caractérisation des adhérences)**.** *Soit* $(X,\mathcal{T})$*, un espace topologique et soit* $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathcal{T}$*. Alors,* $\forall A \subseteq X, \bar{A} = \{x \in X | si\ B \in \mathcal{B}\ et\ x \in B,\ alors\ A \cap B \neq \emptyset\}$

Preuve. Soit $x \in \bar{A}$, alors on sait que $\forall C$ fermés tels que $A \subseteq C, x \in C$. Alors

$$\forall U \in \mathcal{T} \text{ t.q. } A \subseteq X\backslash U, x \in X\backslash U \implies A \cap U = \emptyset \text{ et } x \notin U$$

Donc, s'il existe $U \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in U$ on sait que $A \cap U \neq \emptyset$ et on a

$$\bar{A} = \{x \in X : \text{ si } U \in \mathcal{T} \text{ vérifie } x \in U, \text{ alors, } A \cap U \neq \emptyset\}\}$$

On cherche à présent à se réduire à une base $\mathcal{B}$. Voyons que

$$U \in \mathcal{T} \implies \exists \{B_i : i \in I\} \text{ t.q. } U = \bigcup_{i \in I} B_i$$

et

$$x \in U \implies \exists i \in I \text{ t.q. } x \in B_i \text{ et } A \cap U \neq \emptyset \implies \exists j \in I \text{ t.q. } A \cap B_j \neq \emptyset$$

$\square$

On donne les 2 prochaines résultats sans preuves

Proposition 2.43 (Caractérisation de la continuité)**.** *Soient* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *des espaces topologiques et* $f : X \to X'$ *une application, alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *est continue*
2. $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$
3. $\forall C' \subseteq X'$ *fermé par rapport à* $\mathcal{T}', f^{-1}(C')$ *fermé par rapport à* $\mathcal{T}$

Preuve. Comme d'habitude, on cherche à montrer que $(a) : 1) \implies 2)$, $(b) : 2) \implies 3)$ et $(c) : 3) \implies 1)$

(a) Nous allons utiliser la caractérisation des adhérences pour montrer que $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout $A \subseteq X$.

Soit $x' \in f(\bar{A})$, alors, il existe $x \in \bar{A}$ t.q. $x' = f(x)$. Par la caractérisation des adhérences :

$$\forall U \in \mathcal{T} \text{ t.q. } x \in U, U \cap \bar{A} \neq \emptyset \tag{2}$$

On cherche à montrer que

$$\forall U' \in \mathcal{T}' \text{ t.q. } x' \in U', U' \cap f(A) \neq \emptyset$$

Or, f est continue par hypothèse, alors, $U' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Par ailleurs, $f(x) = x' \in U' \implies x \in f^{-1}(U')$ et par 2, on a $A \cap f^{-1}(U') \neq \emptyset$ d'où

$$\emptyset \neq f(A \cap f^{-1}(U')) = f(A) \cap f(f^{-1}(U')) \subseteq f(A) \cap U'$$

et comme $x' \in U'$ et $f(A) \cap U' \neq \emptyset$, on sait que $f(x) = x' \in \overline{f(A)}$

(b) Soit $A' \subseteq X'$ fermé par rapport à $\mathcal{T}'$, alors,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A') &\subseteq \overline{f^{-1}(A')} && \text{car } A \subseteq \overline{A}, \forall A \subseteq X \\
&\subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(A')})) && \text{car } f^{-1}(U') \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(U'))), \forall U' \in \mathcal{T}' \\
&\subseteq f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(A'))}) && \text{car } f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X (\text{par hypothèse}) \\
&= f^{-1}(\overline{A'}) && \text{car } f(f^{-1}(A')) = A', \forall A' \subseteq X' \\
&= f^{-1}(A') && \text{car } A' = \overline{A'}, \forall A' \subseteq X \text{ fermé}
\end{aligned}$$

(c) Soit $U' \in \mathcal{T}'$, on pose $C' := X' \backslash U'$ qui est donc fermé par rapport à $\mathcal{T}'$. Par hypothèse, $f^{-1}(C')$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}$, or

$$f^{-1}(C') = f^{-1}(X' \backslash U') = X \backslash f^{-1}(U') \iff f^{-1}(U') = X \backslash f^{-1}(C')$$

donc $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ puisque $f^{-1}(C')$ est fermé.

$\square$

Lemme 2.44 (Lemme de recollement bis)**.** *Soient* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *des espaces topologiques et* f*, une application, alors, s'il existe un nombre fini de fermés* $\{C_1, \dots, C_n\}$ *t.q.* $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ *et* $f_{C_i} : (C_i, \mathcal{T}_{C_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ *continue* $\forall 1 \leq i \leq n$*, alors* f *est continue.*

Preuve. On cherche en fait à montrer que $C' \subseteq X'$ fermé $\implies f^{-1}(C')$ est aussi fermé.
En fait, on voit que

$$f^{-1}(C') = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap f^{-1}(C') = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{f|_{C_i}^{-1}(C')}_{\text{fermé}}}_{\text{fermé car réunion de fermés}}$$

$\square$

2.1.5 Compacité

Pour rappel, la définition de compacité en analyse peut-être caractérisée de la manière suivante

Théorème 2.45 (Heine-Borel)**.** *Les propositions suivantes sont équivalentes pour* $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. $\forall \{B_{d_{euc}}(x_i, r_i) | i \in I\}$ *t.q.* $A \subseteq \bigcup_{i \in I} B_{d_{euc}}(x_i, r_i)$, $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ *t.q.* $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{d_{euc}}(x_{i_k}, r_{i_k})$
2. *A est fermé et borné, autrement dit "compact".*

Cependant, dans notre cours, on va donner la définition suivante :

Definition 2.46 (Compacité)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un recouvrement ouvert de $(X, \mathcal{T})$ est une collection $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ t.q. $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$. Si tout recouvrement ouvert de X admet un sous recouvrement fini, alors, X est compact.
Autrement dit, si $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$, où $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, alors, $\exists n \in \mathbb{N}$ et $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ t.q. $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.

Remarque 2.47. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $Y \subseteq X$. Alors : $(Y, \mathcal{T}_Y)$ compact $\iff \forall \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ t.q. $Y \subseteq \bigcup_{v \in \mathcal{V}} V, \exists n \in \mathbb{N}$ et $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ t.q. $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.

Lemme 2.48. *Soient* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$*, des espaces topologiques et soit* $Y \subseteq X$*. Si* $(X, \mathcal{T})$ *est compact, alors*

1. *Si* Y *est fermé par rapport à* $\mathcal{T}$*, alors,* $(Y, \mathcal{T})$ *est aussi compact*
2. *Si* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *est continue, alors,* $(Im(f), \mathcal{T}'_{Im(f)})$ *est aussi compacte.*

Preuve.

1) Soit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ t.q. $Y \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$, comme Y est fermé, on a que $X \backslash Y \in \mathcal{T}$. On peut alors écrire

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \cup (X \backslash Y) = Y \cup (X \backslash Y)$$

Comme $(X, \mathcal{T})$ est compact, $\exists \{V_1, \dots, V_n\} \subseteq \mathcal{V}$ t.q.

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \cup (X \backslash Y)$$

d'où

$$Y = Y \cap X = Y \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_i \cup (X \backslash Y) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

Alors Y est bien compact

2) Soit $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{T}'$ t.q. $Im(f) \subseteq \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'} V'$, f est continue alors $f^{-1}(V') \in \mathcal{T}$ pour tout $V' \in \mathcal{V}'$. Comme $Im(f) \subseteq \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'} V'$, on sait que $X = \bigcup_{V' \in \mathcal{V}'} f^{-1}(V')$, or, $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors $\exists V'_1, \dots, V'_n$ t.q. $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V'_i)$, d'où $Im(f) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(V'_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} V'_i$

□

Definition 2.49. Soient X, un ensemble, et soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La collection $\mathcal{C}$ vérifie la propriété d'intersection finie (PIF) si $\forall \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$$

Proposition 2.50 (Caractérisation de la compacité)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace topologique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(X, \mathcal{T})$ est compact*
2. *Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vérifie la PIF et $\forall C \in \mathcal{C}$, C est fermé par rapport à $\mathcal{T}$, alors $\bigcap_{c \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$*

Preuve. On montre ceci comme un si et seulement si 1) $\implies$ 2) et 1) $\impliedby$ 2)

" $\implies$ " Par contradiction, supposons que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vérifie la PIF et C est fermé pour tout $C \in \mathcal{C}$. Si $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ est vide, on a que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \backslash C) = X$ donc $\{X \backslash C : C \in \mathcal{C}\}$ est un recouvrement de X. Cependant, $(X, \mathcal{T})$ est compact alors il existe $\{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}$ t.q. $X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash C_i)$, autrement dit, $X = X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}$ vérifie la PIF donc nécessairement $\bigcap_{c \in \mathcal{C}} C = \emptyset$.

" $\impliedby$ " Par contradiction, soit $\mathcal{V}$, un recouvrement ouvert de X donc $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$, on a alors

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} (X \backslash V) = X \backslash \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \emptyset$$

On pose $\mathcal{C} = \{X \backslash V : V \in \mathcal{V}\}$, remarquons que $X \backslash V$ est fermé pour tout $V \in \mathcal{V}$.
Si X n'admet aucun recouvrement fini de $\mathcal{V}$, alors,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \{V_1, \dots, V_n\} \subseteq \mathcal{V} \text{ on a} \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subsetneq X \text{ alors } X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$$

Par conséquent, $\forall \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}$, on a

$$C_1 \cap \dots \cap C_n = \bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash V_i) = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$$

Donc $\mathcal{C}$ vérifie la PIF et, par hypothèse,

$$\emptyset \neq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} X \backslash V$$

Ce qui contredit le fait que $\mathcal{V}$ est un recouvrement de X.

$\square$

Lemme 2.51. *"Être compact" est une propriété topologique*

Preuve. Soit $h : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ un homéomorphisme, si $(X, \mathcal{T})$ est compact, par le lemme 2.48, on sait que $(Im(h), \mathcal{T}_{Im(h)})$ est également compact. Or, h est une bijection donc $Im(h) = X'$, donc $(X', \mathcal{T}')$ est compact. $\square$

2.2 Espaces produits

Notations Soient X_1, X_2 des ensembles. Les projections sont les applications

$$pr_1 : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array} \qquad pr_2 : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Proposition 2.52 (Propriétés élémentaires)**.** *Soient $A_1, B_1 \subseteq X_1$ et $A_2, B_2 \subseteq X_2$.*

1. $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$
2. $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$
3. *Soit $A_1 \subseteq X_1$, alors $pr_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 \subseteq X_1 \times X_2$*
4. *Soient $f_1 : Y \to X_1$, $f_2 : Y \to X_2$, des applications. Alors, il existe des applications*

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \\
Y \arrow[ur, bend left, "pr_1\circ(f_1;f_2)"] \arrow[r, "(f_1;f_2)"] \arrow[dr, bend right, "pr_2\circ(f_1;f_2)"'] & X_1 \times X_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
& X_2
\end{tikzcd}
\quad \textit{ou} \quad
\begin{tikzcd}
& X_1 \\
Y \arrow[ur, bend left, "pr_1\circ g"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, bend right, "pr_2\circ g"'] & X_1 \times X_2 \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
& X_2
\end{tikzcd}$$

Preuve. 1.

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) &\iff (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \text{ et } (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \\
&\iff x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \text{ et } x_1 \in B_1, x_2 \in B_2 \\
&\iff x_1 \in A_1 \cap B_2, x_2 \in A_2 \cap B_2 \\
&\iff (x_1, x_2) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) &\iff (x_1 \in A_1 \text{ et } x_2 \in A_2) \text{ ou } (x_1 \in B_1 \text{ et } x_2 \in B_2) \\
&\iff x_1 \in A_2 \cup B_1 \text{ et } x_2 \in A_2 \cup B_2
\end{aligned}$$

Et on montre que l'inclusion est à sens unique avec un contre exemple direct (par exemple si l'un des sous-ensemble est vide)

$\square$

2.2.1 Produits finis d'espaces topologiques

Remarque 2.53. Dans ce chapitre, on se concentre sur les cas avec 2 espaces car les autres cas peuvent être résolus par récurrence.

Definition 2.54. Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. La topologie produit sur $(X_1 \times X_2)$ est la plus petite topologie $\mathcal{T}$ telle que

$$pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i) \text{ continue } \forall i = 1, 2$$

Remarque 2.55.

- ici "plus petite" veut dire "incluse dans toutes les topologies t.q. pr_i est continue"
- Pourquoi existe-t-elle ? On sait qu'il existe au moins la topologie discrète.
- Pour trouver la plus petite topologie, on peut prendre l'intersection de toutes les topologies de cette collection car :
  Si $pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ et $pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ sont continues, alors $pr_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}', \forall U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i = 1, 2$
  Cependant, ce n'est pas pratique comme façon de construire et comprendre la topologie.

Notation $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 =$ topologie produit,

Construction de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$

Lemme 2.56. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Alors, $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est engendrée par la sous-base*

$$\{U_1 \times X_2 | U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 | U_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

Preuve. Voyons que, comme $pr_i : (X_1 \times X_2) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ est continue $\forall i = 1, 2$, alors, nécessairement

$$pr_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}, \forall U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i = 1, 2$$

Et, en faisant varier $i = 1, 2$, on a que

$$\{U_1 \times X_2 \in \mathcal{T} | U_1 \in \mathcal{T}_2\} \cup \{X_1 \times U_2 \in \mathcal{T} | U_2 \in \mathcal{T}_2\} \subseteq \mathcal{T}$$

Donc en particulier, si $\tilde{\mathcal{T}}$ est la topologie engendrée par $\{U_1 \times X_2 | U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 | U_2 \in \mathcal{T}_2\}$, alors $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$.
Par ailleurs, puisque pr_i est continue par rapport à $\tilde{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est la plus petite topologie qui vérifie cette condition $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$, d'où $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \tilde{\mathcal{T}}$. ☐

Corollaire 2.57. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Une base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ est $\{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\}$*

Preuve. On doit calculer les intersections finies d'éléments de la sous-base du lemme précédent :

$$U_1 \times X_2, \ldots, U_k \times X_2; X_1 \times V_1, \ldots, X_1 \times V_l \quad \text{où } U_i \in \mathcal{T}_1, V_j \in \mathcal{T}_2 \; \forall 1 \leq i \leq k, \forall 1 \leq j \leq l,$$

Et on trouve

$$\bigcap_{i=1}^{k}(U_i \times X_2) \cap \bigcap_{j=1}^{l}(X_1 \times V_j) = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) \times X_2\right) \cap \left(X_1 \times \bigcap_{j=1}^{l} V_j\right) = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right)}_{\in \mathcal{T}_1} \times \underbrace{\left(\bigcap_{j=1}^{l} V_j\right)}_{\in \mathcal{T}_2}$$

Donc tout élément de la base engendrée par la sous-base du lemme est de la forme $U \times V; U \in \mathcal{T}_1; V \in \mathcal{T}_2$. Par ailleurs, $\forall U \in \mathcal{T}_1, \forall V \in \mathcal{T}_2$: on a

$$(U \times X_2) \cap (X_1 \times V) = U \times V$$

donc tout produit $U \times V$ appartient à la base engendrée par la sous-base du lemme. □

Corollaire 2.58. *Les éléments de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ sont de la forme $\bigcup_{i \in I}(U_i \times V_i)$, où $U_i \in \mathcal{T}_1, V_i \in \mathcal{T}_2, \forall i \in I$ et I quelconque.*

Preuve. La preuve est directe comme il s'agit de la topologie engendrée par la base calculée précédemment qu'on sait être la topologie $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$. □

Corollaire 2.59. *Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ des bases de $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$. Alors $\{B_1 \times B_2 | B_i \in \mathcal{B}_i, i \in \{1,2\}\}$ est une base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$*

Preuve. Par comparaison de bases, $\{B_1 \times B_2 | B_i \in \mathcal{B}_i\} \subseteq \{U_i \times V_i | U_i \in \mathcal{T}_1, V_i \in \mathcal{T}_2\}$. Donc

$$\mathcal{T}_{\{B_1 \times B_2 | B_i \in \mathcal{B}_i\}} \subseteq \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$$

Pour l'autre inclusion, soit $U \times V$, où $U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2$. Soit $(x_1, x_2) \in U \times V$, comme $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont des bases, on a que

$$\exists B_1 \in \mathcal{B}_1; B_2 \in \mathcal{B}_2 \text{ t.q. } x_1 \in B_1 \subseteq U_1, x_2 \in B_2 \subseteq V \text{ et donc } (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V$$

alors

$$\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_{\{B_1 \times B_2 | B_i \in \mathcal{B}_i\}}$$

Et on a bien $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\{B_1 \times B_2 | B_i \in \mathcal{B}_i\}}$ □

Exemple 2.60.

1. $(X_1, \mathcal{T}_{gr}), (X_2, \mathcal{T}_{gr}) \implies \mathcal{T}_{gr} * \mathcal{T}_{gr} = \mathcal{T}_{gr}$.
2. $(X_1, \mathcal{T}_{disc}), (X_2, \mathcal{T}_{disc}) \implies \mathcal{T}_{disc} * \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{disc}$

Proposition 2.61. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Soit $\mathcal{T}$, une topologie sur $X_1 \times X_2$. Alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$ si les affirmations suivantes sont vérifiées :*

1. *$pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ continue*
2. *$\forall (Y, \mathcal{T})$ espace topologique tel que*

$$(f_1, f_2) : (Y \to \mathcal{T}') \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}) \text{ continues } \iff (f_1, f_2) \circ pr_i =: f_i : (Y, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i) \text{ continues}$$

Preuve. (1) est vrai par définition de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$

(2) On va montrer les 2 sens de l'implication, soit $(Y, \mathcal{T}')$ un espace topologique et soient $f_1 : Y \to X_1, f_2 : Y \to X_2$ des applications.

" $\implies$ " Si $(f_1, f_2) : (Y, \mathcal{T}') \to (X_1, \mathcal{T}_1)$ est continue, alors, clairement, $f_1 = pr_1 \circ (f_1, f_2)$ est également continue car elle est la composée de 2 fonctions continues et il en va de même pour f_2.

" $\Longleftarrow$ " Si $f_1 : (Y, \mathcal{T}') \to (X_1, \mathcal{T}_1)$ et $f_1 : (Y, \mathcal{T}') \to (X_1, \mathcal{T}_1)$ sont continues, alors, il suffit de vérifier que les pré-images des éléments d'une sous base sont des ouverts de $\mathcal{T}'$ pour montrer que (f_1, f_2) est continue.

Soit $U_1 \times X_2 = pr_1^{-1}(U_1)$ où $U_1 \in \mathcal{T}_1$, alors

$$(f_1, f_2)^{-1}(U_1 \times X_2) = (f_1, f_2)^{-1}(pr_1^{-1}(U_1)) = (\underbrace{pr_1 \circ (f_1, f_2)}_{=f_1})^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_1) \in \mathcal{T}'$$

Où on justifie la dernière égalité car f_1 est continue. On peut appliquer le même raisonnement sur tout élément $U_2 \in \mathcal{T}_2$.
Alors, comme $\{U_1 \times X_2 : U_1 \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times U_2 : U_2 \in \mathcal{T}_2\}$ est une sous-base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$, et qu'on a vérifié la continuité en chacun de ces ouverts, on sait que la fonction (f_1, f_2) est bien continue. $\square$

Remarque 2.62. Plus généralement, on a $\mathcal{T} \xrightarrow{h} W \xrightarrow{k} Z \supseteq A$, alors $h^{-1}(k^{-1}(A)) = (k \circ h)^{-1}(A)$

2.2.2 Produits cartésiens infinis

Remarque 2.63. On introduit, une manière différente de concevoir le produit cartésien fini qu'on pourra facilement généraliser au cas infini

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles, alors, on peut définir le produit cartésien de la manière suivante :

$$\prod(X_1, \ldots, X_n) := \{f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i |\ f(i) \in X_i\}\}$$

et, $\forall 1 \leq i \leq n$, $ev_i : \Pi(X_1, \ldots, X_n) \to X_i, f \mapsto f(i)$

Lemme 2.64. *Pour toute collection d'ensembles $\{X_1, \ldots, X_n\}$, il existe une bijections $\phi : X_1 \times \cdots \times X_n \to \Pi(X_1, \ldots, X_n)$ telle que $ev_i \circ \phi = pr_i$*

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "pr_i"'] & & \Pi(X_1, \ldots, X_n) \arrow[dl, "ev_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Preuve. Puisque l'on veut que $ev_i \circ \phi = pr_i$, on doit définit ϕ t.q. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, $ev_i \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = pr_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$
D'où,

$$\phi : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n & \to & \prod(X_1, \ldots, X_n) \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \{1, 2, \ldots, n\} & \to & X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \\ i & \mapsto & x_i \end{array} \end{array}$$

Pour voir que ϕ est une bijection, on observe que l'application $\psi : \Pi(X_1, \ldots, X_n) \to X_1 \times \cdots \times X_n, f_n \mapsto (f_1(1), \ldots, f_n(n))$ est une inverse de ϕ. $\square$

Ceci sert en fait d'introduction à la définition suivante

Definition 2.65. Soit I, un ensemble quelconque. Soit $\{X_i|i \in I\}$, un ensemble d'ensembles. Le produit cartésien de $\{X_i|i \in I\}$ est l'ensemble

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i | f(i) \in X_i,\ \forall i \in I\}$$

Muni de projections

$$pr_i : \begin{cases} \prod_{i\in I} X_i \to X_i, \forall i \in I \\ f \mapsto f(i) \end{cases}$$

Remarque 2.66.

- Étant donné $A_i \subseteq X_i$, $\forall i \in I$, on peut voir $\prod_{i\in I} A_i$ comme le sous-ensemble de $\prod_{i\in I} X_i$ des applications $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ t.q. $f(i) \in A_i, \forall i \in I$
- $\forall i_0 \in I, \forall A_{i_0} \subseteq X_{i_0} : pr_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \prod_{i\in I} A_i$, où $A_i = \begin{cases} X_i : i \neq i_0 \\ A_{i_0} : i = i_0 \end{cases}$
- $A_i, B_i \subseteq X_i, \forall i \in I, (\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$

Notation

- $\underline{x} \in \prod_{i\in I} X_i$, $x_i = \underline{x_i}(i) \in X_i$, $\underline{x} : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$
- Si $X_i = X, \forall i \in I$, on écrit $X^I := \prod_{i\in I} X_i$

Proposition 2.67 (Propriété universelle du produit cartésien quelconque)**.** *Soit $\{X_i|i \in I\}$, un ensemble d'ensembles et soit Y, un ensemble.*
Pour tout ensemble d'applications $\{g_i : Y \to X_i|i \in I\}$ il existe un unique

$$g : Y \to \prod_{i\in I} X_i \quad t.q.\ pr_{i_0} \circ g = g_{i_0} \quad \forall i_0 \in I$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\exists! g"] \arrow[dr, "g_{i_0}"'] & & \prod_{i\in I} X_i \arrow[dl, "pr_{i_0}"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Preuve. Comme $pr_{i_0} \circ g = g_{i_0}, \forall i \in I$, on a que

$$\forall y \in Y, g_{i_0}(y) = pr_{i_0}(g(y)) = g((y))(i_0), \forall i_0 \in I$$

alors

$$g(y) : \begin{array}{ccc} I & \to & \bigcup_{i\in I} X_i \\ i_0 & \mapsto & g_{i_0}(y) \end{array}$$

Et clairement, cette application est bien définie et c'est la seul application qui vérifie la condition initiale. $\square$

2.2.3 Produits quelconques d'espaces topologiques

Definition 2.68. Soit I, un ensemble et soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) | i \in I\}$, un ensemble d'espaces topologiques. La topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$ noté $\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i$ est la plus petite topologie $\mathcal{T}$ telle que

$$pr_{i_0} : (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}) \to (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0}) \text{ est continue } \forall i_0 \in I$$

Remarque 2.69. L'existence de $\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i$ est établie de manière semblable au cas fini.

Proposition 2.70 (Caractérisation de la topologie produit minimale)**.** *Pour tout ensemble d'espace topologique* $\{X_i, \mathcal{T}_i | i \in I\}$*, la topologie produit* $\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i$ *est celle dont une sous-base est la suivante :*

$$\{pr_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) | U_{i_0} \in \mathcal{T}_{i_0}, \forall i_0 \in I\}$$

La preuve de ce résultat est très semblable au cas fini.

Remarque 2.71. En fait, on peut voir qu'une base de $\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}$ est donnée par

$$\{\prod_{i\in I} V_i | V_i \in \mathcal{T}_i \text{ et } \#\{i | V_i \neq X_i\} < \infty\}$$

Et, de manière plus générale, on a la caractérisation suivante

Corollaire 2.72. *Si* $\mathcal{B}_i$ *est une base de* $\mathcal{T}_i, \forall i \in I$*, alors il existe une base de* $\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i$ *de la forme*

$$\{\prod_{i\in I} B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\}, \forall i \in I, \#\{B_i \neq X_i\} < \infty\}$$

Preuve. Très semblable au cas fini $\square$

Exemple 2.73.

1. Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_{gr}) | i \in I\}$, alors
$$\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{gr}$$
2. Considérer $\{(X_i, \mathcal{T}_i) | i \in I\}$ où $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X_i)$. Alors, si $\#I < \infty$, on obtient la topologie discrète, et quand $\#I = \infty$, on obtient une topologie différente de la topologie discrète.
Voyons qu'on peut former une base $\underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i : \{\prod_{i\in I} V_i | V_i \in \mathcal{T}_{disc}, \#\{i | V_i \neq X_i\} < \infty\}$

Proposition 2.74 (Propriétés universelles de la topologie produit)**.** *Soit* $\{(X_i, \mathcal{T}_i : i \in I)\}$*, une collection d'espaces topologiques. Soit* $\mathcal{T}'$*, une topologie sur* $\prod_{i\in I} X_i$*, alors* $\mathcal{T}' = \underset{i\in I}{\star}\mathcal{T}_i$ *si les 2 conditions suivantes sont respectées :*

1
$$pr_{i_0} : (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}') \to (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0}) \text{ est continue } \forall i_0 \in I$$

2
$$\forall\{f_i : Y \to X_i | i \in I\}, f_i : (Y, \mathcal{T}) \to (X-i, \mathcal{T}_i) \text{ est continue } \forall i \in I \iff (f_i)_{i\in I} : (Y, \mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}')) \text{ continue}$$

2.3 Le théorème de Tychonoff

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant

Théorème 2.75. *Tout produit d'espaces compacts est compact.*

2.3.1 Cas fini

Remarque 2.76. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors,

$$(\{x\} \times X, \{\emptyset, \{x\}\} \star \mathcal{T}\})$$

est aussi compact car

$$(X, \mathcal{T}) \simeq (\{x\} \times X, \{\emptyset, \{x\}\} \star \mathcal{T})$$

et on peut expliciter un homéomorphisme

Lemme 2.77 (Lemme du tube)**.** *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologique où $(X', \mathcal{T}')$ est compact. Soit $W \in \mathcal{T} \star \mathcal{T}'$. S'il existe $x \in X$ t.q. $\{x\} \times X' \subseteq W$, alors, $\exists U \in \mathcal{T}$ t.q. $U \times X' \subseteq W$.*

Preuve. Soit $W \in \mathcal{T} \star \mathcal{T}'$ et soit $x \in X$ comme dans l'hypothèse. Alors, $\forall x' \in X'$, on a que $(x, x') \in W$. Donc il existe un élément de la base de $\mathcal{T} \star \mathcal{T}'$ qui contient (x, x') et qui est contenu dans W. Autrement dit

$$\exists U_{x'} \in \mathcal{T}, V_{x'} \in \mathcal{T}' \text{ t.q. } (x, x') \in U_{x'} \times V_{x'} \subseteq W$$

Observons que $X' = \bigcup_{x' \in X'} V_{x'}$, donc $\{V'_x | x' \in X'\}$ est un recouvrement ouvert de $(X', \mathcal{T}')$ qui est compact, donc, il existe $x'_1, \ldots, x'_n$ t.q. $X' = \bigcup_{i=1}^n V_{x'_i}$. On pose $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x'_i} \in \mathcal{T}$.
Alors, $x \in U_{x'}, \forall x' \in X'$, donc $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_{x'_i}$. Pour montrer que $U \times X' \subseteq W$: on observe que

$$(y, y') \in U \times X' = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i} \times \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \implies y \in U_{x'_i}, \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } \exists 1 \leq j \leq n \text{ t.q. } y' \in V_{x'_j}$$

et on peut conclure $(y, y') \in U_{x'_j} \times V_{x'_j} \subseteq W$ □

Proposition 2.78. *Tout produit fini d'espaces topologiques compacts est compact*

Preuve. Soient $X \times X'$ où $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont compacts, et soit $\bigcup_{i \in I} W_i$ un recouvrement de $X \times X'$. Puisque $(\{x\} \times X', \{\emptyset, \{x\}\} \star \mathcal{T}')$ est compact pour tout $x \in X$, il existe pour tout $x \in X$ un sous-recouvrement fini

$$\{x\} \times X' \subseteq \tilde{W}_x := \bigcup_{i=1}^{N_x} W_{x,i}$$

En appliquant le lemme du tube, on choisit $U_x \in \mathcal{T}$ tel que $\{x\} \times X' \subseteq U_x \times X' \subseteq \tilde{W}_x$.
Maintenant, puisque $\bigcup_{x \in X} U_x = X$ et $(X, \mathcal{T})$ est compact, on peut choisir un sous-recouvrement $\bigcup_{j=1}^m U_{x,j} = X$, d'où

$$X \times X' = \bigcup_{i=1}^n U_i \times X' \subseteq \bigcup_{j=1}^m \tilde{W}_{x_j} = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{N_{x,j}} W_{j_{x,k}}.$$

□

2.3.2 Cas pas nécessairement fini

Pour traiter ce cas, on utilise alors un équivalent de l'axiome du choix :

Lemme 2.79 (Lemme de Zorn)**.** *Soit $(A, <)$ un ensemble muni d'un ordre partiel. Si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet une borne supérieure dans A, alors A possède un élément maximal, c'est-à-dire $\exists m \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $m \not< x$.*

Lemme 2.80 (Lemme 1)**.** *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{A}$ satisfait la propriété de l'intersection finie (PIF), alors, $\exists \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tel quel $\mathcal{D}$ satisfait*

- *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$,*
- *$\mathcal{D}$ respecte la PIF, et*
- *$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E} \implies \mathcal{E}$ ne satisfait pas la PIF.*

Preuve. L'objectif de la preuve est d'appliquer le Lemme de Zorn à l'ensemble suivant :

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{B} \text{ satisfait la PIF}\}$$

Vérifions que $\forall \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$, si $\mathbb{B}$ est totalement ordonné dans $(\mathbb{A}, \subsetneq)$, alors $\mathbb{B}$ admet une borne supérieure.
Soit $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$, on voit que $\mathcal{C} \in \mathbb{A}$, en effet, par construction $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ car $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ pour tout $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$. De plus, voyons que $\mathcal{C}$ vérifie la PIF, si $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{C}$, alors il existe $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \in \mathbb{B}$ t.q. $U_i \in \mathcal{B}_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Comme $\mathbb{B}$ est totalement ordonné, on peut supposer sans perte de généralité $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_n$ pour tout $1 \leq i < n$ d'où $U_i \in \mathcal{B}_n$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Et, comme $\mathcal{B}_n$ vérifie la PIF, on a bien $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \neq \emptyset$.
Par construction, $\forall \mathcal{B} \in \mathbb{B}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ donc $\mathbb{B}$ est une borne supérieur de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{A}$. Et on peut appliquer le lemme de Zorn en posant que $\mathcal{D}$ est l'élément maximal de $(\mathbb{A}, \subsetneq)$. □

Lemme 2.81 (Lemme 2)**.** *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ l'élément maximal par rapport à la PIF. Alors*

1. *$D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D} \implies D_1 \cap \cdots \cap D_n \in \mathcal{D}$, et*
2. *Si $A \in \mathcal{P}(X)$ et $A \cap D \neq \emptyset$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, alors $A \in \mathcal{D}$.*

Preuve.

1. Il est clair que $\mathcal{D} \cup \{D_1 \cap \cdots \cap D_n\}$ satisfait la PIF, puisque $\mathcal{D}$ le fait. La maximalité de $\mathcal{D}$ implique alors que $\mathcal{D} \cup \{D_1, \ldots, D_n\} \subseteq \mathcal{D}$, d'où $\mathcal{D} \cup \{D_1, \ldots, D_n\} = \mathcal{D}$, ce qui implique que $D_1 \cap \cdots \cap D_n \in \mathcal{D}$.

2. Observer que $\mathcal{D} \cup \{A\}$ satisfait la PIF. En effet, pour tout $D_1, .., D_n \in \mathcal{D}$, le fait que $\mathcal{D}$ vérifie la PIF implique que $D_1 \cap \cdots \cap D_n \neq \emptyset$, et la première partie du lemme implique que $D_1 \cap \cdots \cap D_n \in \mathcal{D}$. Par l'hypothèse sur A, $A \cap D_1 \cap \cdots \cap D_n \neq \emptyset$. La maximalité de $\mathcal{D}$ implique alors que $\mathcal{D} \cup \{A\} = \mathcal{D}$, d'où $A \in \mathcal{D}$.

□

Théorème 2.82 (Tychonoff infini)**.** *Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact*

Preuve. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$, où $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est un espace compact pour tout $i \in I$. Poser $\mathcal{T} = \underset{i \in I}{\star} \mathcal{T}_i$. Nous voulons montrer que $(X, \mathcal{T})$ est compact.

Il suffit de montrer que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfait la PIF, alors $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \neq \emptyset$, ce qui est une condition plus forte que la caractérisation de la compacité en termes de la PIF.

Supposons que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfait la PIF. Par le Lemme 1, il existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui contient $\mathcal{A}$ et qui est maximal par rapport à la PIF. Puisque $\mathcal{D}$ vérifie la PIF, l'ensemble $\mathcal{D}_i = \{pr_i(D) : D \in \mathcal{D}\} \subseteq P(X_i)$ la vérifie pour tout $i \in I$, vu que

$$pr_i(D_1) \cap \cdots \cap pr_i(D_n) = pr_i(D_1 \cap \cdots \cap D_n)$$

pour tous $D_1, .., D_n \in \mathcal{D}$. Par conséquent $\{\overline{pr_i(D)} : D \in \mathcal{D}\} \subseteq P(X_i)$ vérifie aussi la PIF, puisque

$$pr_i(D_1) \cap \cdots \cap pr_i(D_n) \subseteq \overline{pr_i(D_1)} \cap \cdots \cap \overline{pr_i(D_n)}$$

pour tous $D_1, .., D_n \in \mathcal{D}$. Or $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est compact par hypothèse, donc par la caractérisation de la compacité en termes de la PIF,

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{pr_i(D)} \neq \emptyset$$

pour tout i.

Soit $x_i \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{pr_i(D)}$. Poser $\underline{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$. On montrera que

$$\underline{x} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D},$$

d'où on pourra déduire que $\emptyset \neq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$, puisque $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ car $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.

On montrera que tout élément de la base usuelle de la topologie produit $\mathcal{T}$ qui contient $\underline{x}$ a une intersection non-vide avec chaque $D \in \mathcal{D}$. Par la caractérisation de l'adhérence, cela impliquera que $\underline{x} \in \overline{D}$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, d'où $\underline{x} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$, comme souhaité.

Soit

$$B = pr_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap pr_{i_n}^{-1}(U_n)$$

un élément de la base usuelle de $\mathcal{T}$ tel que $\underline{x} \in B$, où $U_k \in \mathcal{T}_{i_k}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors pour tout $1 \leq k \leq n$, $\underline{x} \in pr_{i_k}^{-1}(U_k)$, d'où $x_k \in U_k$, ce qui implique que $U_k \cap pr_{i_k}(D) \neq \emptyset$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, puisque $x_{i_k} \in \overline{pr_{i_k}(D)}$ par hypothèse.

Par conséquent, pour tout $1 \leq k \leq n$, $pr_{i_k}^{-1}(U_k) \cap D \neq \emptyset$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, ce qui implique par Lemme 2 (2) que $pr_{i_k}^{-1}(U_k) \in \mathcal{D}$. Par Lemme 2 (1), il s'ensuit que $B \in \mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{D}$ vérifie la PIF, on en déduit que $B \cap D \neq \emptyset$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, comme souhaité. $\square$

3 Notion de séparabilité

3.1 Espaces de Hausdorff

Motivation : On veut éviter les espaces "pathologiques" tel que

- $(X, \mathcal{T}_{gr})$ avec $|X| \geq 2 \implies \{x\}$ n'est pas fermé dans $(X, \mathcal{T}_{gr})$
- $X = \{x, y\}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \{y\}, X\}$ alors $\{y\}$ n'est pas fermé

Definition 3.1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff si, pour tout $x, x' \in X$ avec $x \neq x'$, $\exists U, U' \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U, x' \in U'$ et $U \cap U' = \emptyset$

Exemple 3.2.

- $\#X \geq 2 \implies (X, \mathcal{T}_{gr})$ n'est pas un espace de Hausdorff.
- $(X, \mathcal{T}_{disc})$ est un espace de Hausdorff pour tout X.
- $(X, \mathcal{T})$ métrisable $\implies (X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff[6]

Lemme 3.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff, $Y \subseteq X$. Si $\#Y < \infty$, alors Y est fermé par rapport à $\mathcal{T}$*

Preuve. Il suffit de montrer que pour $y \in X$, $\{y\}$ est fermé. On montre que $X \backslash \{y\}$ est ouvert. Pour chaque $x \in X \backslash \{y\}$, on choisit U_x, U'_x tels que $x \in U_x, y \in U'_x$ et $U_x \cap U'_x = \emptyset$, alors $U_x \subseteq X \backslash \{y\}$ et $\bigcup_{x \in X} U_x = X \backslash \{y\}$ donc $\{y\}$ est fermé et comme $Y = \bigcup_{y \in Y} \{y\}$ est une union finie d'ensembles fermés, il est également fermé. □

Corollaire 3.4. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff et $\#X < \infty$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.*

Preuve. Trivialement, par le lemme précédent, tous les ensembles sont fermés alors, comme X est fini, on peut écrire tous les ensembles en terme de leur complément fini. □

Definition 3.5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si, $\forall U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U, \exists N_U \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_u \implies x_n \in U$.
On dit alors que x est la limite de la suite.

Remarque 3.6. Voyons qu'avec cette définition, il peut en fait exister plusieurs limites différentes pour une même suite, cependant, on va montrer qu'elle est unique pour un espace de Hausdorff

Exemple 3.7.

- Dans le cas de la topologie grossière $(X, \mathcal{T}_{gr})$, tous les éléments sont les limites de toutes les suites.
- Pour $(X, \mathcal{T}_{disc}) : \forall (x)_{n \in \mathbb{N}}, \forall x \in X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \iff \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = x, \forall n \geq N$
- $X = \{x, y\}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \{y\}, \{x, y\}\}$, alors, la suite $\{y\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et vers y.

Proposition 3.8. *Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace de Hausdorff, si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors, sa limite est unique*

[6] On peut toujours prendre comme base les boules ouvertes et on peut prendre un rayon arbitrairement petit pour isoler chaque point

Preuve. En procédant par absurde, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers $x \in X$ et vers $y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors, $\forall U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U, y \in V$

$$\exists M, N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n \in U, \forall n \geq M \text{ et } x_n \in V, \forall n \geq N$$

De fait, on a

$$n \geq \max(M, N) \implies x_n \in U \cap N \text{ d'où } U \cap V \neq \emptyset$$

Or, $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff alors on peut nécessairement trouver $U \ni x$ et $V \ni y$ t.q. $U \cap V = \emptyset$ on a donc une contradiction. □

Proposition 3.9. *"Être un espace de Hausdorff" est une propriété topologique.*

Preuve. Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace de Hausdorff et soit $(X', \mathcal{T}')$ un espace topologique tel que $h : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est un homéomorphisme.
Soient $x' \neq y' \in X'$, et posons $x, y \in X$ tels que $h(x) = x'$ et $h(y) = y'$ (qui existe de manière unique car h est bijective). Puisque $x' \neq y'$, il est aussi vrai que $x \neq y$.
Remarquons que, comme $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff, on peut poser $U, V \in \mathcal{T}$ tels que

$$x \in U, y \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

On a alors que, comme h est continue, $U' := h(U) \in \mathcal{T}'$ et $V' := h(V) \in \mathcal{T}'$. Il vient alors directement que

$$x' \in U', \quad y' \in V', \quad U' \cap V' = h(U) \cap h(V) = h(U \cap V) = \emptyset$$

alors $(X', \mathcal{T}')$ est de Hausdorff. □

Proposition 3.10. *Tout sous-espace compact d'un espace de Hausdorff est fermé*

Remarque 3.11. Pour rappel, si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, et $A \subseteq X$, alors

$$x \in \bar{A} \iff \forall U \in \mathcal{T},\ x \in U \implies A \cap U \neq \emptyset$$

Preuve. Soit $(X, \mathcal{T})$ de Hausdorff, soit $A \subseteq X$ t.q. $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact.
On doit montrer que $A = \bar{A}$, autrement dit, $x \in X \backslash A \implies x \notin \bar{A}$.
Si $x \in X \backslash A$, comme $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff on a

$$\forall a \in A,\ \exists U_a, V_a \in \mathcal{T} \text{ t.q. } a \in U_A, x \in V_a, U_a \cap V_a = \emptyset$$

Observons que $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$. Or $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact, donc,

$$\exists a_1, ..., a_n \in \bar{A} \text{ t.q. } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} =: U$$

On pose $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \in \mathcal{T}$ par $(T3)$. Puisque $x \in V_{a_i}, \forall 1 \leq i \leq n$, on a que $x \in V$ et $V \cap U = \emptyset$ car $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset, \forall i$. Comme $A \subseteq U$, on en déduit que $A \cap V = \emptyset$, par conséquent $x \notin \bar{A}$ et on conclut $A = \bar{A}$. □

Proposition 3.12. *Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ une application continue et bijective. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact et $(X', \mathcal{T}')$ est de Hausdorff, alors f est un homéomorphisme*

Preuve. On doit montrer que f^{-1} est continue, autrement dit que $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{T}', \forall U \in \mathcal{T}$ $(f^{-1} : X' \to X)$ Ce qui est équivalent à exiger que $(f^{-1})^{-1}(C)$ fermé par rapport à $\mathcal{T}', \forall C$ fermé de $(X, \mathcal{T})$. Puisque f et f^{-1} sont des bijections, $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$.
Soit $C \subseteq X$ fermé par rapport à $\mathcal{T}$, puisque $(X, \mathcal{T})$ est compact, alors $(C, \mathcal{T}_C)$ l'est aussi. Puisque $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, $(f(X), \mathcal{T}'_{f(C)})$ est également compact. Puisque $(X', \mathcal{T}')$ est un espace de Hausdorff, la proposition précédente implique que $f(C)$ est fermé par rapport $\mathcal{T}'$. □

3.2 Espaces réguliers

Definition 3.13. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est régulier si tous les singletons sont fermés par rapport à $\mathcal{T}$ et $\forall x \in X, \forall A \subseteq X\backslash\{x\}$ fermé par rapport à $\mathcal{T}, \exists U, V \in \mathcal{T}$ t.q. $U \cap V = \emptyset$ et $x \in U, A \subseteq V$.

Remarque 3.14. Régulier $\implies$ Hausdorff mais ce n'est pas réciproque

Exemple 3.15.

- $(X, \mathcal{T}_{disc})$ est toujours régulier car $\forall x \in X, \forall A \subseteq X\backslash\{x\}$, on peut prendre $U = \{x\}$ et $V = A$
- Tout espace métrisable est régulier (Preuve à venir)

Proposition 3.16. *Si $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff et compact, alors $(X, \mathcal{T})$ est régulier.*

Preuve. Soient $x \in X$, $A \subseteq X\backslash\{x\}$ fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Puisque $(X, \mathcal{T})$ est compact, $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi compact. Puisque $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff on a

$$\forall a \in A, \exists U_a, V_a \in \mathcal{T} \text{ t.q. } V_a \cap U_a = \emptyset,\ x \in V_a,\ a \in U_a$$

Observons que $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$, comme $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact on a

$$\exists a_1, ..., a_n \text{ t.q. } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} =: U$$

On pose $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \in \mathcal{T}$ par (T3) avec $x \in V$ alors

$$U \cap V = (\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap \bigcap_{j=1}^{n} V_{a_j}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\underbrace{U_{a_i} \cap V_{a_i}}_{=\emptyset}) = \emptyset$$

Alors, on a bien

$$A \subseteq U, x \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

□

Proposition 3.17 (Caractérisation de la régularité)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace topologique tels que tous les singletons sont fermés. Alors, $(X, \mathcal{T})$ est régulier $\iff \forall x \in U \in \mathcal{T}, \exists V \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.*

Preuve.

$\implies$ On pose $A = X\backslash U$ fermé par rapport $\mathcal{T}$. Puisque $x \in U, x \notin A$, par la régularité de $(X, \mathcal{T})$, on a que

$$\exists V, W \in \mathcal{T} \text{ t.q. } x \in V \text{ et } A \subseteq W$$

Pour voir que $\bar{V} \subseteq U$, on sait que $X\backslash U \subseteq W$ d'où $U \supseteq X\backslash W$, par ailleurs, on a

$$V \cap W = \emptyset,\ V \subseteq X\backslash W \text{ d'où } V \subseteq \bar{V} \subseteq X\backslash W \subseteq U$$

$\impliedby$ Soit $x \in X$, soit $A \subseteq X\backslash\{x\}$ fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Puisque $A \subseteq X\backslash\{x\}, x \in X\backslash A$, de plus, $X\backslash A \in \mathcal{T}$. Par hypothèse, $\exists V \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in V$ et $\bar{V} \subseteq X\backslash A$, d'où $A \subseteq X\backslash\bar{V}$ et $X\backslash\bar{V} \in \mathcal{T}$. Il reste à voir que $V \cap (X\backslash\bar{V}) = \emptyset$, ce qui est une conséquence immédiate du fait que $V \subseteq \bar{V}$. Donc on a bien

$$x \in V \in \mathcal{T}, A \subseteq X\backslash\bar{V} \in \mathcal{T} \text{ et } V \cap (X\backslash\bar{V}) = \emptyset$$

$\square$

Remarque 3.18. Si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$, alors on peut supposer $V \in \mathcal{B}$

Proposition 3.19.

1. *Tout sous-espace d'un espace topologique régulier est régulier*
2. *Tout produits d'espaces réguliers est réguliers*

Preuve.

1. Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace régulier et soit $Y \subseteq X$. Soit $y \in Y$ et soit $A \subseteq Y \backslash \{y\}$ fermé par rapport $\mathcal{T}$. Alors, $\exists B \subseteq X$ fermé par rapport à $\mathcal{T}$ t.q. $A = B \cap Y$. On observe que $y \notin A \implies y \notin B$. Par la régularité de $(X, \mathcal{T})$
$$\exists U, V \in \mathcal{T} \text{ t.q. } U \cap V = \emptyset, y \in U, B \subseteq V$$
Par conséquent,
$$y \in U \cap Y \in \mathcal{T}_Y, A = B \cap Y \subseteq \mathcal{T}_Y$$
De fait,
$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) \subseteq U \cap V = \emptyset \text{ alors } (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$$
et on a vérifié les conditions pour être un espace régulier.

2. Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$, un ensemble quelconque d'espaces réguliers. On cherche à appliquer la caractérisation de la régularité pour montrer que $(\prod_{i \in I} X_i, \underset{i \in I}{\star} \mathcal{T}_i)$ est bien régulier.

   Soit $x \in \prod_{i \in I} X_i$ et soit $U \in \underset{i \in I}{\star} \mathcal{T}_i$ t.q. $x \in U$. Alors, il existe un élément de base $B_i = \prod_{i \in I} U_i$ tel que $x \in B_i \subseteq U$. On sait que tout élément de la base a comme propriété que $\#\{i \in I : U_i \neq X_i\} < \infty$, en nommant cet ensemble fini $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$, on a alors que $\forall 1 \leq k \leq n$, $x_{i_k} \in U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$.
   Par la régularité de $(X_{i_k}, \mathcal{T}_{i_k})$, on a que
$$\exists V_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k} \text{ t.q. } x_{i_k} \in V_{i_k} \subseteq \bar{V}_{i_k} \subseteq U_{i_k}$$
   Alors
$$x \in \prod_{i \in I} V_i \subseteq \overline{\prod_{i \in I} V_i} \subseteq \prod_{i \in I} \bar{V}_i \subseteq \prod_{i \in I} U_i \quad \text{où } V_i = \begin{cases} X_i : i \neq i_k, \forall k \\ V_{i_k} : i = i_k, 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

$\square$

3.3 Espaces normaux

Definition 3.20. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est normal si tout singleton est fermé et si $\forall A, B \subseteq X$ fermés par rapport à $\mathcal{T}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $\exists U, V \in \mathcal{T}$ t.q. $A \subseteq U, B \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Remarque 3.21. Normal $\implies$ régulier mais pas l'inverse en général.

Proposition 3.22 (Caractérisation de la normalité)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique t.q. tout singleton est fermé. Alors,*

$$(X, \mathcal{T}) \textit{ est normal } \iff \forall A \subseteq X \textit{ fermé par rapport à } \mathcal{T}, \forall U \in \mathcal{T}, A \subseteq U, \exists V \in \mathcal{T} \textit{ t.q. } A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

Preuve. La preuve est très semblable au cas de la régularité en remplaçant $\{x\}$ par A. $\square$

Remarque 3.23.

1. Il existe des espaces normaux dont certains sous-espaces ne sont pas normaux
2. Il existe des espaces normaux $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ dont le produit n'est pas normal

Proposition 3.24. *"Être normal" est une propriété topologique.*

Preuve. Soit $h : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$, un homéomorphisme. Sans perte de généralité, on peut supposer $(X, \mathcal{T})$ normal. Soient $A', B' \subseteq X'$ fermés par rapport à $\mathcal{T}'$ et tels que $A' \cap B' = \emptyset$. Considérons $h^{-1}(A'), h^{-1}(B')$ qui sont fermés par rapport à $\mathcal{T}$ car h est continue.
Comme $(X, \mathcal{T})$ est normal,

$$\exists U, V \in \mathcal{T} \text{ t.q } U \cap V = \emptyset \text{ et } h^{-1}(A') \subseteq U, h^{-1}(B') \subseteq V$$

Clairement

$$A' \cap B' = \emptyset \implies h^{-1}(A') \cap h^{-1}(B') = \emptyset$$

Alors, comme h est une application ouverte, $h(U), h(V) \in \mathcal{T}'$. Par ailleurs, comme $U \cap V = \emptyset$ et h est injective, on a $h(U) \cap h(V) = \emptyset$. Et on a

$$A' = h(h^{-1}(A')) \subseteq h(U), B' = h(h^{-1}(B')) \subseteq h(V)$$

où on utilise la surjectivité de h. □

Remarque 3.25. Les preuves que "être régulier" et "être de Hausdorff" sont des propriétés topologiques sont semblables.

Proposition 3.26 (Sources d'espaces normaux)**.** *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est normal si une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) $(X, \mathcal{T})$ est régulier et admet une base dénombrable

2) $(X, \mathcal{T})$ est métrisable

3) $(X, \mathcal{T})$ est compact et de Hausdorff

Preuve.
Soient $A, C \subseteq X$, des fermés par rapport à $\mathcal{T}$ t.q. $A \cap C = \emptyset$

1 $\forall a \in A$, comme $a \in X \backslash C$ et C est fermé, il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ t.q. $a \in U \subseteq X \backslash C$. Comme $(X, \mathcal{T})$ est régulier, par la caractérisation de la régularité, on sait que

$$\exists B_a \in \mathcal{B} \text{ t.q. } a \in B_a \subseteq \bar{B}_a \subseteq U$$

où $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie.
De même, $\forall c \in C$, on a

$$\exists B_c \in \mathcal{B} \text{ t.q. } c \in B_c \subseteq \bar{B}_c \subseteq X \backslash A$$

Par conséquent, on a

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_a \quad C \subseteq \bigcup_{c \in C} B_c$$

Or, $\mathcal{B}$ est dénombrable, alors, il existe $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A, \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ t.q. $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{a_i}, C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{c_i}$
On pose alors

$$U_n = B_{a_n} \backslash \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_{c_i}}_{\text{fermé}} \in \mathcal{T}, V_n = B_{c_n} \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_{a_i} \in \mathcal{T}$$

Observons que $a_n \in U_n, c_n \in V_n$ et que même $U_n \cap A = B_{a_n} \cap A$, puisque $\bar{B}_{c_i} \subseteq X \backslash A, \forall i \in \mathbb{N}$. De même, $V_n \cap C = B_{c_n} \cap C$. On pose alors $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ et $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. On affirme que

(a) $U \cap V = \emptyset$

(b) $A \subseteq U, C \subseteq V$

Pour montrer le point (a) voyons que $U_m \cap V_n = \emptyset, \forall m, n$.
Si $m \geq n$, alors

$$U_m = B_{a_m} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \bar{B}_{c_i} \text{ et } V_n = B_{c_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_{a_i}, \text{ d'où } B_{c_n} \cap U_m = \emptyset \text{ et donc } U_m \cap V_n = \emptyset$$

et l'argument est similaire si $m \leq n$ donc $U \cap V = \emptyset$
Montrons à présent (b),
On a par construction $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{a_n}$ d'où $A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{a_n} = A$ i.e.

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_{a_n}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap U_n) = A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

On a alors bien

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = U, C \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = V \quad \text{ et } \quad U \cap V = \emptyset$$

2 Soit d, une métrique sur X telle que $(X, \mathcal{T}) \simeq (X, \mathcal{T}_d)$. Soit $a \in A$, comme $a \in X \setminus C$ et C fermé, $\exists \varepsilon_a > 0$ t.q. $B_j(a, \varepsilon_a) \cap C = \emptyset$. De même, $\forall c \in C, \exists \varepsilon_c > 0$ t.q. $B_d(c, \varepsilon_c) \cap A = \emptyset$. Donc $d(a, c) \geq \max(\varepsilon_a, \varepsilon_c)$.
On pose

$$U = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon_a/2), V = \bigcup_{c \in C} B_d(c, \varepsilon_c/2)$$

Alors

$$A \subseteq U, C \subseteq V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

3 On sait déjà que compact + Hausdorff $\implies$ régulier, par conséquent

$$\forall a \in A, \exists U_a, V_a \in \mathcal{T} \text{ t.q. } a \in U_a, C \subseteq V_a \text{ et } U_a \cap V_a = \emptyset$$

Ainsi, $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$, or, A est fermé et $(X, \mathcal{T})$ est compact. Alors, $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact donc on a que

$$\exists a_1, ..., a_n \in A \text{ t.q. } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} = U$$

On pose alors $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ pour avoir

$$A \subseteq U, C \subseteq V \quad \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

$\square$

Remarque 3.27.

$$\boxed{\text{Hausdorff} \; \boxed{\text{Réguliers} \; \boxed{\text{Normaux} \; \boxed{\text{Métrisables}}}}}$$

Hausdorff $\cap$ Compacts $\subseteq$ Normaux

3.4 Lemme d'Urysohn et conséquences

Lemme 3.28 (Urysohn)**.** *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique normal, alors $\forall A, B \subseteq X$ fermés par rapport à $\mathcal{T}$ t.q. $A \cap B = \emptyset$ et $\forall a < b \in \mathbb{R}$, il existe une application continue*

$$f : \begin{array}{rcl} (X, \mathcal{T}) & \to & ([a, b], (\mathcal{T}_{st})_{[a,b]}) \\ x & \mapsto & \begin{cases} a : x \in A \\ b : x \in B \end{cases} \end{array}$$

Exemple 3.29 (Exemple simple)**.**

$$(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st}), A = [\alpha_1, \alpha_2], B = [\beta_1, \beta_2] \text{ avec } \alpha_2 < \beta_1 \text{ et } a = 1, b = 2$$

On peut alors simplement faire la prolongation de la fonction de manière linéaire (on prolonge par une droite entre les 2) mais c'est compliqué dans $\mathbb{R}^2$

Preuve. Sans perte de généralités, on pose $a = 0$ et $b = 1$. On commence par choisir une bijection

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ n & \mapsto & q_n \quad \text{t.q.} \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Affirmation 1 :

$$\exists \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T} \text{ t.q. } A \subseteq U_n \subseteq X \backslash B \text{ et t.q. } q_i < q_j \implies \bar{U}_i \subseteq U_j \quad (\star)$$

Preuve de l'affirmation. Par récurrence sur n, on pose $U_0 = X \backslash B$, la caractérisation de la normalité nous dit que

$$\exists U_1 \in \mathcal{T} \text{ t.q. } A \subseteq U_1 \subseteq \bar{U}_1 \subseteq U_0$$

on vérifie bien $q_1 < q_0$.
Supposons à présent qu'il existe $\{U_0, ..., U_n\} \subseteq \mathcal{T}$ qui vérifie $(\star)$, on veut trouver

$$U_{n+1} \in \mathcal{T} \text{ t.q. } A \subseteq U_{n+1} \subseteq X \backslash B \text{ et } \begin{cases} q_i < q_{n+1} \implies \bar{U}_i \subseteq U_{n+1} \\ q_{n+1} < q_j \implies \bar{U}_{n+1} \subseteq U_j \end{cases}$$

On définit

$$q_k = \max\{q_i : q_i < q_{n+1}, 0 \leq i \leq n\} \text{ et } q_l = \min\{q_j : q_{n+1} < q_j, 0 \leq j \leq n\}$$

alors, $q_k < q_l$, donc par $(\star)$, on a $\bar{U}_k \subseteq U_l$.
Par la caractérisation de la normalité, $\exists U_{n+1} \in \mathcal{T}$ t.q. $\bar{U}_k \subseteq U_{n+1} \subseteq \bar{U}_{n+1} \subseteq U_l$ □

Affirmation 2, on définit

$$f : \begin{array}{rcl} X & \to & [0, 1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & : x \in B \\ \inf\{q_i : x \in U_i\} & : x \in X \backslash B \end{cases} \end{array}$$

Alors,

$$f(x) = 0, \forall x \in A \text{ et } f : (X, \mathcal{T}) \to ([0, 1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}) \text{ est continue}$$

Preuve.

- $A \subseteq U_0 \implies$ si $x \in A$, alors $f(x) = 0$ car $\inf\{q_i : x \in U_i\} = 0$
- Continuité en $x_0 \in X$, il y a 3 cas $f(x_0) = 0$, $f(x_0) = 1$ et $0 < f(x_0) < 1$, on ne traitera que le dernier cas.
  Observons que $x_0 \in \bar{U}_i \implies f(x_0) \leq q_i$ et $x_0 \in X \backslash U_i \implies f(x_0) \geq q_i$. On a que

  $$\exists s, t \text{ t.q. } 0 < s < f(x_0) < t < 1$$

  Par densité des rationnels, $\exists q_i, q_j$ t.q. $s < q_i < f(x_0) < q_j < t$, d'où $x_0 \in U_j \backslash \bar{U}_i \in \mathcal{T}$ et $f(U_j \backslash \bar{U}_i) \subseteq [q_i, q_j] \subseteq]s, t[\implies$ continuité de f en x_0. Et les autres cas sont semblables.

□

On a alors bien construit la fonction respectant les propriétés demandées. □

Théorème 3.30 (Théorème de métrisation d'Urysohn)**.** *Tout espace régulier qui admet une base dénombrable est métrisable.*

Preuve. On veut montrer que si $(X, \mathcal{T})$ est régulier et admet une base dénombrable $\mathcal{B}$, alors, $\exists$ une application continue et injective

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \underset{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{*} \mathcal{T}_{st})$$

telle que $f|^{Im(f)}$ est un homéomorphisme et où $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \underset{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{*} \mathcal{T}_{st})$ est un espace métrisable car produits de métrisables.
Bout de preuve : $(X, \mathcal{T})$ est un espace régulier muni d'une base dénombrable $\mathcal{B}$ alors $(X, \mathcal{T})$ est normal. Soient $B_k, B_l \in \mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par le lemme d'Urysohn

$$\bar{B}_k \subseteq B_l \implies \exists f_{k,l} : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}) \text{ continue t.q. } f(\bar{B}_k) = \{1\} \text{ et } f(X \backslash B_l) = \{0\}$$

Soit $x \in X$ et $U \in \mathcal{T}$. Alors, $\exists B_l \in \mathcal{B}_l$ t.q. $x \in B_l \subseteq U$. Par la caractérisation de la régularité $\exists B_k \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B_k \subseteq \bar{B}_k \subseteq B_l$
Donc $\exists f_{k,l}$ continue t.q. $f_{k,l}(x) = 1$ et $f_{k,l}(X \backslash B_l) = \{0\}$
On définit

$$f : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R}^I \\ x & \mapsto & f_{k,l}(x)_{(k,l)\in I} \end{array} \quad \text{avec } I = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bar{B}_k \subseteq B_l\}$$

Comme chaque composante est continue, on sait que la fonction elle-même est continue.
De plus, elle est injective car, si $x \neq x' \in X, \exists B_l, B_{l'} \in \mathcal{B}$, t.q. $x \in B_l, x' \in B_{l'}, B_l \cap B_{l'} = \emptyset$, on considère $x \in B_k \subseteq \bar{B}_k \subseteq B_l$, alors $f_{k,l}(x) = 1$ mais $f_{k,l}(x') = 0$ car $x' \in B_{l'} \subseteq X \backslash B_l$ donc $f(x) \neq f(x')$, il reste à voir que $f|^{Im(f)}$ est une application ouverte □

4 Autour de la notation de "connexe"

4.1 Espaces connexes

Definition 4.1 (définition non standard de la PVI)**.** Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie la PVI (propriété de la valeur intermédiaire) si pour toute application continue $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ et $\forall x < y \in \mathrm{Im}(f)$, on a que $[x, y] \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Proposition 4.2 (Caractérisation de la PVI)**.** *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la PVI si et seulement si $\exists U, V \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ tels que*

$$U \cup V = X, \qquad \textit{et } U \cap V = \emptyset$$

Preuve.

" $\Longrightarrow$ " Si $(X, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la PVI, alors $\exists f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ continue et $x < y \in Im(f)$ tels que $[x, y] \not\subseteq Im(f)$. Autrement dit, il existe $z \in (x, y)$ tel que $z \notin Im(f)$.

Considérons $f^{-1}((-\infty, z))$, $f^{-1}((z, +\infty))$ qui sont ouverts (par la continuité de f et comme on a associé $\mathbb{R}$ à la topologie standard). Par ailleurs, ce sont des ouverts non vides, étant donné que $[x, z) \subset (-\infty, z)$ et $(z, y] \subset (z, +\infty)$, et que par hypothèse $x, y \in Im(f)$.

Ensuite, $f^{-1}((-\infty, z)) \cap f^{-1}((z, +\infty)) = \emptyset$, puisque $(-\infty, z) \cap (z, +\infty) = \emptyset$.

Enfin, $f^{-1}((-\infty, z)) \cup f^{-1}((z, +\infty)) = X$, puisque $\forall w \in X, f(w) \in (-\infty, z) \cup (z, +\infty)$.

Donc on peut poser $U = f^{-1}((-\infty, z))$, $V = f^{-1}((z, +\infty))$ et on a $U, V \in \mathcal{T}\setminus\{\emptyset\}$ et $U \cup V = X$.

" $\Longleftarrow$ " Supposons que $U, V \in \mathcal{T}\setminus\{\emptyset\}$ tel que $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$. Choisissons $a < b \in \mathbb{R}$ et définissons

$$f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a : & x \in U \\ b : & x \in V \end{cases} \end{array}$$

Cette application est bien définie car $U \cap V = \emptyset$ et définie pour tout $x \in X$ car $U \cup V = X$. Par ailleurs, $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ est bien continue, car pour tout $W \in \mathcal{T}_{st}$:

$$f^{-1}(W) = \begin{cases} \emptyset, & a \notin W, b \notin W \\ U, & a \in W, b \notin W \\ V, & a \notin W, b \in W \\ X, & a, b \in W \end{cases} \in \mathcal{T}.$$

Donc f est bien continue.

Enfin, pour tout $c \in (a, b)$, $c \notin Im(f)$. Donc $(X, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la PVI.

□

Definition 4.3 (Séparation)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soient $U, V \in \mathcal{T}\setminus\{\emptyset\}$. Le couple d'ouverts U, V est une séparation de $(X, \mathcal{T})$ si $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$. Noté : $U|V$.

Definition 4.4 (Espace connexe)**.** L'espace $(X, \mathcal{T})$ est connexe s'il n'admet aucune séparation.

Remarque 4.5. On a donc, par la caractérisation de la PVI :

$$(X, \mathcal{T}) \text{ connexe } \iff (X, \mathcal{T}) \text{ vérifie la PVI}$$

Exemple 4.6.

1. $(X, \mathcal{T}_{gr})$: il n'existe aucune séparation car il y a un seul ouvert non vide. Donc c'est toujours connexe.
2. $(X, \mathcal{T}_{disc})$: si $\#X \leq 1$, alors $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{gr}$ donc connexe. Si $\#X \geq 2$, alors il existe une séparation. Par exemple, si on fixe $x_0 \in X$, $\{x_0\}|X\backslash\{x_0\}$ où ce dernier est non-vide car $\#X \geq 2$.
3. Puisque, comme vu au cours d'analyse, $([a,b], \mathcal{T}_{st}|_{[a,b]})$ vérifie la PVI, on sait que $([a,b], \mathcal{T}_{st}|_{[a,b]})$ est connexe.

Proposition 4.7 (Propriétés élémentaires)**.**

1. *Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe et $A \subseteq X$ est ouvert* et *fermé par rapport à $\mathcal{T}$, alors soit $A = X$, soit $A = \emptyset$.*
2. *L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe*
3. *Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est un sous-espace connexe de $(X, \mathcal{T})$ et $U|V$ est une séparation de $(X, \mathcal{T})$, alors soit $Y \subseteq U$, soit $Y \subseteq V$.*
4. *"être connexe" est une propriété topologique (stable sous homéomorphisme).*

Preuve.

1. Soit $\emptyset \neq A \subsetneq X$ ouvert et fermé par rapport à $\mathcal{T}$. Par hypothèse, A est ouvert et $X\backslash A$ est ouvert (car A est aussi supposé fermé). On vérifie immédiatement

$$A \cup X\backslash A = X \text{ et } A \cap X\backslash A = \emptyset$$

Alors, $A|X\backslash A$ est une séparation ce qui contredit la connexité de $(X, \mathcal{T})$.

2. Dans les séries d'exercices.
3. Soit $U|V$ une séparation de $(X, \mathcal{T})$. Considérons $U \cap Y, V \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Alors

$$(U \cap Y) \cup (V \cup Y) = (U \cup V) \cap Y = X \cap Y = Y$$

Et

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (\underbrace{U \cap V}_{=\emptyset}) \cap Y = \emptyset$$

Puisque $(Y, \mathcal{T}_Y)$ connexe, on ne peut pas avoir de séparations donc $U \cap Y = \emptyset$ ou $V \cap Y = \emptyset$, d'où $Y \subseteq V$ ou $Y \subseteq U$.

4. Dans les séries d'exercices.

$\square$

Proposition 4.8 (Caractérisation d'espaces connexes)**.**

1. *(Recollement) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, soit $\{A_i \ : \ i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, on pose $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ et $(A_i, \mathcal{T}_{A_i})$ est connexe pour tout $i \in I$, alors $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi connexe.*
2. *(Adhérence) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subseteq X$. Si $(A, \mathcal{T}_A)$ est un sous-espace connexe, alors $(B, \mathcal{T}_B)$ est aussi connexe pour tout $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$.*
3. *(Produits finis) Tout produit fini d'espaces connexes est connexe.*

Preuve.

1. Montrons que $(A, \mathcal{T}_A)$ vérifie la PVI. Soit $f : (A, \mathcal{T}_A) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ une fonction continue, et soit $x < y \in Im(f)$. On veut montrer que $[x, y] \subseteq Im(f)$.

   Soit $z \in (x, y)$, puisque $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, on sait

   $$\exists i_0,\ i_1 \in I, \quad a_0 \in A_{i_0},\ a_1 \in A_{i_1} \text{ tels que } f(a_0) = x,\ f(a_1) = y.$$

   - Si $i_0 = i_1$, on peut conclure:
     $f|_{A_{i_0}} : (A_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ est continue et $x = f(a_0), y = f(a_1) \in Im(f|_{A_{i_0}})$. Par hypothèse, $(A_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0})$ est connexe, donc vérifie la PVI, donc il existe $a_2 \in A_{i_0} \in A$ tel que $f(a_2) = z$.
   - Si $i_0 \neq i_1$, alors choisissons $b \in A_{i_0} \cap A_{i_1}$. on a alors 2 cas distincts :

     $$x = f(a_0) < f(b) < f(a_1) = y \quad \text{ou} \quad f(b) < f(a_0) \quad (\text{où } f(a_1) < f(b) \text{ est analogue})$$

     En effet, si $f(b) = f(a_0)$ on peut se ramener au cas $i_0 = i_1$.
     Si $f(b) < x$, par la PVI pour $(A_{i_1}, \mathcal{T}_{i_1})$, il existe $a' \in A_{i_1}$ tel que $f(b) < f(a') = z < f(a_1)$
     Si $f(a_1) > f(b) > f(a_0)$, on a 3 cas :
     - $f(b) = z$ alors directement $z \in Im(f)$
     - $f(b) > z$ alors, par la PVI sur A_{i_0} on sait que $z \in [x, f(b)] \subseteq Im(f)$
     - $f(b) < z$ alors, par la PVI sur A_{i_1} on sait que $z \in [f(b), y] \subseteq Im(f)$

   On a donc bien $z \in [x, y] \implies z \in Im(f)$

2. Par contradiction, on suppose $(A, \mathcal{T}_A)$ connexe et on suppose que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Utilisons la caractérisation de l'adhérence.

   Si $U|V$ était une séparation de $(B, \mathcal{T}_B)$, alors il y aurait $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{T}$ tel que $U = \tilde{U} \cap B$, $V = \tilde{V} \cap B$ avec $U \cup V = B$ et $U \cap V = \emptyset$. La caractérisation de l'adhérence impliquerait alors que $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$, puisque $U \neq \emptyset$, et $V \neq \emptyset$, donc contiennent au moins un élément de B. Alors on aurait une séparation $U \cap A | V \cap A$ de A, vonyons que

   $$U \cap A = \tilde{U} \cap A \in \mathcal{T}_A,\ V \cap A = \tilde{V} \cap A \in \mathcal{T}_A$$

   Alors

   $$(U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cup V) \cap A = B \cap A = A$$

   Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse que $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe. Donc il n'existe pas de séparation de $(B, \mathcal{T}_B)$.

3. Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ des espaces connexes. Puisque "être connexe" est une propriété topologique, on a

   $$\forall x_0 \in X, (\{x_0\} \times X',\ \mathcal{T}_{\{x_0\}} * \mathcal{T}') \simeq (X', \mathcal{T}') \quad \text{et} \quad x_0' \in X'(X \times \{x_0'\},\ \mathcal{T} * \mathcal{T}'_{\{x_0'\}}) \simeq (X, \mathcal{T})$$

   Alors, $(\{x_0\} \times X',\ \mathcal{T}_{\{x_0\}} * \mathcal{T}')$ et $(X \times \{x_0'\},\ \mathcal{T} * \mathcal{T}'_{\{x_0'\}})$ sont connexes. Observons que $(x_0, x_0') \in (\{x_0\} \times X') \cap (X \times \{x_0'\})$. Donc par le point 1,

   $$\text{Si } \mathcal{T}_{x_0, x_0'} = (\{x_0\} \times X') \cup (X \times \{x_0'\}), \text{ alors } (\mathcal{T}_{x_0, x_0'}, (\mathcal{T} * \mathcal{T}')_{\mathcal{T}_{x_0, x_0'}}) \text{ est aussi connexe.}$$

   Observons que $\bigcup_{x_0 \in X} \mathcal{T}_{x_0, x_0'} = X \times X'$ et que $\bigcap_{x_0 \in X} \mathcal{T}_{x_0, x_0'} = X \times \{x_0'\} \neq \emptyset$.

   De nouveau par le point 1, $(X \times X', \mathcal{T} * \mathcal{T}')$ est alors connexe. Pour un produit fini quelconque, on procède par récurrence en utilisant cette construction.

$\square$

4.2 Connexité par arcs

Definition 4.9 (Chemin)**.** Un *chemin* dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est une application continue

$$\lambda : ([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}).$$

Si $\lambda(0) = x_0,\ \lambda(1) = x_1$, on dit que λ est un chemin de x_0 vers x_1.

Definition 4.10 (Espace topologique connexe par arcs)**.** L'espace $(X, \mathcal{T})$ est *connexe par arcs* si pour tout $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin λ dans X tel que $\lambda(0) = x_0,\ \lambda(1) = x_1$.

Proposition 4.11 (Propriétés de la connexité par arcs)**.**

1. *Tout espace connexe par arcs est connexe*
2. *"Être connexe par arcs" est une propriété topologique*

Preuve.

1. Ce résultat est démontré en série d'exercice
2. Soit $h : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ un homéomorphisme, sans pertes de généralités, supposons que $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs. Alors, on a

$$\forall x_0', x_1' \in X', \quad h^{-1}(x_0'), h^{-1}(x_1') \in X$$

   et on peut construire le chemin

$$\lambda : ([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}) \to (X, \mathcal{T}) \text{ t.q. } \begin{cases} \lambda(0) = h^{-1}(x_0') \\ \lambda(1) = h^{-1}(x_1') \end{cases}$$

   Alors $h \circ \lambda : ([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue car composée d'applications continues et on a bien $h \circ \lambda(0) = x_0', h \circ \lambda(1) = x_1'$

□

Exemple 4.12.

1. $(X, \mathcal{T}_{gr})$ est connexe par arcs, car $\forall x_0, x_1 \in X$ on peut poser

$$\lambda : \begin{array}{rcl} ([0,1], (\mathcal{T}_{st})_{[0,1]}) & \to & (X, \mathcal{T}_{gr}) \\ t & \mapsto & \begin{cases} x_0 : t = 0 \\ x_1 : t > 0 \end{cases} \end{array}$$

   et cette application est bien continue car toute application est continue dans la topologie grossière

2. $(X, \mathcal{T}_{dsic})$ n'est pas connexe si $\#X \geq 2$ alors il n'est pas connexe par arcs (connexe par arcs $\implies$ connexe) .
3. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{st})$ est évidemment connexe par arcs (on peut intuitivement relier 2 points par une droite ou un segment). Et, pour $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si A est convexe (i.e. $\forall a_0, a_1 \in A$ le segment qui les relie est inclus dans A), alors $(A, (\mathcal{T}_{st})_A)$ est aussi connexe par arcs

On s'intéresse alors à un exemple très connu de la topologie qui est connexe mais pas connexe par arcs

Exemple 4.13 (La courbe sinus du topologue)**.** On pose $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ avec $(S, (\mathcal{T}_{st})_S)$ un espace topologique, on voit qu'il s'agit d'une espace connexe car il s'agit de l'image d'une application continue.

Considérons $(\overline{S}, (\mathcal{T}_{st})_{\overline{S}})$ qui est également connexe par un résultat précédent (adhérence d'un connexe).

MAIS par connexe par arcs, en effet, en prenant l'adhérence, on a rajouté l'ensemble $\{0\} \times [-1, 1]$, or, en prenant les points $(0, 0)$ et $(1, \sin(1))$, on voit qu'il est impossible de trouver un chemin qui les relie.

En effet, s'il y avait un tel chemin, il y aurait un $m > 0$ t.q. si $t > m$, alors $\lambda(t) \in S$ (car $\{0\} \times [-1, 1]$ est fermé). On construit ensuite, en utilisant la PVI de $]m, +\infty[$ une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, 1]$ qui converge vers 0 mais tele que la suite $\lambda(t_n)$ ne converge pas. En effet, on peut définir la suite comme suit :

$$\lambda(t_n) = \begin{cases} (u_n, -1) : n \text{ impair} \\ (u_n, +1) : n \text{ pair} \end{cases}$$

qui est clairement divergente. Or, une application continue doit envoyer une suite convergente vers une suite convergente mais il est clair que la suite u_n.

4.3 Composantes connexes (par arcs)

4.3.1 Cas connexe

Definition 4.14. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La relation de connexité sur X par rapport à $\mathcal{T}$ est celle donnée par

$$x \sim x' \iff \exists A \subseteq X \text{ t.q. } \begin{cases} x, y \in A \\ (A, \mathcal{T}_A) \text{ connexe} \end{cases}$$

Remarque 4.15. On a vu en série d'exercice qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence

Definition 4.16 (Composante connexe)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace topologique, soit $x \in X$, la composante connexe de x par rapport à $\mathcal{T}$ est sa classe d'équivalence par rapport à $\sim$, notée C_x

Proposition 4.17 (Propriétés des composantes)**.** *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $x \in X$*

1. *Posons $\mathcal{C}_x = \{A \subseteq X : x \in A$ et $(A, \mathcal{T}_A)$ connexe$\}$, alors $C_x = \bigcup_{A\in\mathcal{C}_x} A$*
2. *$(C_x, \mathcal{T}_{C_x})$ est connexe*
3. *$C_x = \overline{C_x}$ (i.e. C_x fermé)*
4. *Si $(X, \mathcal{T})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes distinctes, alors, $C_x \in \mathcal{T}, \forall x \in X$*

Preuve.

1. Si $y \in C_x$, alors $x \sim y$ donc $\exists A \subseteq X$ t.q. $x, y \in A$ et t.q. $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe, d'où $A \in \mathcal{C}_x$, d'où $C_x \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{C}_x} A$. Par ailleurs, si $A \in \mathcal{C}_x$ et $y \in A$, alors $x \sim y$ car $x \in A$ aussi et $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe, donc $\bigcup_{A\in\mathcal{C}_x} A \subseteq C_x$. Donc on a l'égalité $C_x = \bigcup_{A\in\mathcal{C}_x} A$.
2. $$x \in \bigcap_{A\in\mathcal{C}_x} A, \text{ donc } \bigcap_{A\in\mathcal{C}_x} A \neq \emptyset$$

   Puisque $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe pour $A \in \mathcal{C}_x$, par recollement $(\bigcup_{A\in\mathcal{C}_x} A, \mathcal{T}_{\bigcup_{A\in\mathcal{C}_x} A}) =^{(1)} (C_x, \mathcal{T}_{C_x})$ est également connexe

3. Par le point 2, on a que $(\overline{C_x}, \mathcal{T}_{\overline{C_x}})$ est aussi connexe (car il s'agit de l'adhérence d'un connexe). Puisque $x \in C_x \subseteq \overline{C_x}, \overline{C_x} \in \mathcal{C}_x$, d'où $\overline{C_x} \subseteq C_x$, Or, on a toujours $A \subseteq \overline{A}, \forall A \subseteq X$ donc $\mathcal{C}_x = \overline{\mathcal{C}_x}$.

4. Si $\exists x_1, \ldots, x_n \in X$ t.q. $X = \coprod_{i=1}^n C_{x_i}$.[7] Alors $\forall 1 \leq j \leq n$ on a $C_{x_j} = X \backslash (\coprod_{i \neq j} C_{x_i})$ et comme $\coprod_{i \neq j} C_{x_i}$ est une union finie de fermés, elle est fermée et on a bien $C_{x_j} \in \mathcal{T}$, $\forall x \in X$

□

Exemple 4.18.

1. $(X, \mathcal{T})$ connexe, $x \in X$ alors $C_x = X$ car $x \in X$ et $(X, \mathcal{T})$ connexe d'où $X \in \mathcal{C}_x$ - une seule composante connexe.

2. $(X, \mathcal{T}_{disc}), x \in X \implies C_x = \{x\}$ car $(\{x\}, \mathcal{T}_{disc}) = (\{x\}, \mathcal{T}_{gr})$ est connexe, tandis que $(\{x, y_1, \ldots, y_k\}, \mathcal{T}_{disc})$ n'est pas connexe pour tout $k \geq$.

3. $(\mathbb{Q}, (\mathcal{T}_{st})_{\mathbb{Q}}), x \in \mathbb{Q} \implies C_x = \{x\}$ car si $x \neq y \in U \in (\mathcal{T}_{st})_{\mathbb{Q}}$, alors $\exists V \in \mathcal{T}_{st}$ t.q. $U = V \cap \mathbb{Q}$ et $\exists z \in V$ t.q. $x < z < y$ et $z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ d'où $\exists$ séparation de U $(U \cap]-\infty, z[, U \cap]z, \infty[)$.

Remarque 4.19. $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}') \implies$ les deux espaces ont le même nombre de composantes connexes disjointes, c'est-à-dire qu'il existe une bijection

$$\mathcal{C}_x \to \mathcal{C}_{h(x)}$$

Donc si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ n'ont pas le même nombre de composantes connexes, ils ne sont pas homéomorphes.

4.3.2 Connexe par arcs

Definition 4.20. Soit $(X, \mathcal{T})$, un espace topologique, la relation connexité par arcs noté $\underset{\text{arc}}{\sim}$ est définie par

$$x \underset{\text{arc}}{\sim} y \iff \exists \text{ chemin } \lambda \text{ de } x \text{ à } y$$

Lemme 4.21. $\underset{arc}{\sim}$ *est une relation d'équivalence*

Preuve. Preuve par dessin au tableau mais pour l'idée :

- Réfléxivité : Un chemin constant est continu
- Symétrie : Si on part d'un point et qu'on arrive à l'autre, on peut forcément faire le chemin inverse $\overline{\lambda}(t) = \lambda(1-t)$
- Transitivité : $\lambda''(t) = \begin{cases} \lambda(2t) : 0 \leq t \leq 0.5 \\ \lambda'(2t + 0.5) : 0.5 < t \leq 1 \end{cases}$

□

Definition 4.22. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $x \in \mathcal{T}$, la composante connexe par arcs de x est la classe d'équivalence de x par rapport à $\underset{\text{arc}}{\sim}$ noté :

$$P_x$$

Proposition 4.23 (Propriétés des espaces connexes par arcs).

[7] Réunion disjointe, notons d'ailleurs que l'union est disjointe car il s'agit de classes d'équivalences

1. *Si $\mathcal{P}_X = \{A \subseteq X : (A, \mathcal{T}_A)$ connexe par arcs, $x \in A\}$, alors $P_x = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_x} A$*
2. *$(P_x, \mathcal{T}_{P_x})$ est bien connexe par arcs*

Remarque 4.24. $P_x \neq \overline{\mathcal{P}_x}$ en général (voir courbe sinus du topologue)

Preuve. Il est en fait plus simple de commencer par prouver le point 2 puis le point 1, nous allons alors procéder à l'envers

2. Soient $x, y \in \mathcal{P}_x$, on sait que $x \underset{\text{arc}}{\sim} y$, donc il existe un chemin λ continu tel que $\lambda(0) = x$ et $\lambda(1) = y$, donc $(P_X, \mathcal{T}_{P_X})$ est bien connexe par arcs.
1. Si $A \in \mathcal{P}_x$, alors $A \subseteq P_x$ car $\forall y \in A$, $\exists$ chemin λ de x vers y, d'où $x \underset{\text{arc}}{\sim} y$ donc $\bigcup_{A \in \mathcal{P}_x} A \subseteq \mathcal{P}_x$.

   Par le point (2), on sait que $(P_x, \mathcal{T}_{P_x})$ est connexe par arcs et contient x, d'où $P_x \in \mathcal{P}_x$, ce qui implique que $X \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{P}_x} A$ et nous permet de conclure.

□

Remarque 4.25. $\exists h : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ homéomorphes $\implies$ $\exists$ une bijection entre les ensembles de composantes connexes par arcs

$$\mathcal{P}_x \mapsto \mathcal{P}_{h(x)}$$

4.4 Versions locales de la connexité

Definition 4.26. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $x \in X$, alors $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) en x si $\forall U \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in U$, $\exists V \in \mathcal{T}$ t.q.

1. $V \subseteq U$
2. $x \in V$
3. $(V, \mathcal{T}_V)$ connexe (par arcs)

Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) en tout $x \in X$, alors on dit qu'il est localement connexe (par arcs).

Proposition 4.27 (caractérisation)**.** *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) si et seulement si toute composante connexe (par arcs) de tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ est aussi ouverte.*

Preuve. $\Rightarrow$: Soit $U \in \mathcal{T}$. Soit C une composante connexe (par arcs) de $(U, \mathcal{T}_U)$. Soit $x \in C$, d'où $C = C_x$.
Puisque $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs), il existe $V_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in V_x \subseteq U$ et $(V_x, \mathcal{T}_{V_x})$ est connexe (par arcs). Par Proposition 4.17 (1), on peut en déduire que $V_x \subseteq C_x = C$. On conclut que C est bien un ouvert, car $C = \bigcup_{x \in C} V_x$.

$\Leftarrow$: Soit $U \in \mathcal{T}$, et soit $x \in U$. Soit C_x la composante connexe (par arcs) de $(U, \mathcal{T}_U)$ qui contient x.
Par hypothèse $C_x \in \mathcal{T}$, donc on peut poser $V = C_x$ et satisfaire les conditions de la Définition 4.26. □

Corollaire 4.28. *Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.*

Preuve. Si $(X, \mathcal{T})$ n'était pas connexe par arcs, alors il admettrait au moins deux composantes connexes par arcs, i.e., on aurait $X = \coprod_{i \in I} P_{x_i}$, où la cardinalité de I est au moins 2. Par la caractérisation de la connexité locale par arcs, chaque P_{x_i} est un ouvert. On aurait alors une séparation de X

$$\left(P_{x_i}, X \smallsetminus P_{x_i}\right)$$

pour tout $i \in I$, ce qui contredirait le fait que $(X, \mathcal{T})$ est connexe par hypothèse. □

Exemple 4.29. D'où on sait que $(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}})$ n'est pas localement connexe par arcs car connexe mais pas connexe par arcs.