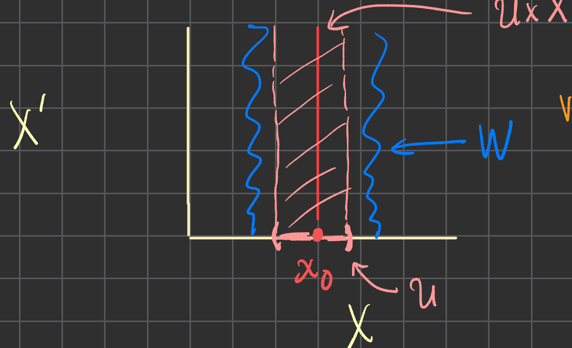
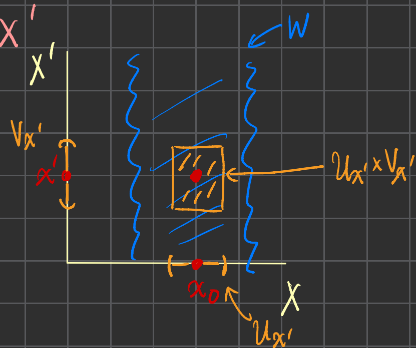
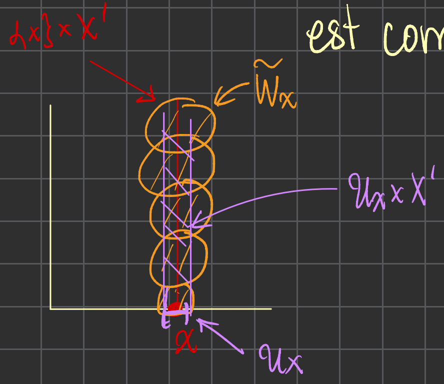
Le lemme du tube : Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques, avec $(X', \mathcal{T}')$ compact. Soit $W \in \mathcal{T} * \mathcal{T}'$. S'il existe $x_0 \in X$ tq $\{x_0\} \times X' \subseteq W$, alors il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tq $x_0 \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \times X' \subseteq W$.





Proposition: Tout produit fini d'espaces compacts est compact.



ii) Le cas général

Le lemme de Zorn : Soit $(A, <)$ un ensemble muni d'un ordre partiel strict. Si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet une borne supérieure dans A, alors A admet un élément maximal, i.e., $\exists\, m \in A$ tq $m \not< a$ $\forall a \in A$.

Lemme 1 : Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{A}$ vérifie la PIF, alors $\exists\, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tq

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ vérifie la PIF, et
- $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}$ ne vérifie pas la PIF.

Lemme 2 : Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ maximal p.r. à la PIF. Alors

i) $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D} \Rightarrow D_1 \cap \dots \cap D_n \in \mathcal{D}$, et

ii) $A \in \mathcal{P}(X)$ et $A \cap D \neq \emptyset$ $\forall D \in \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

Théorème de Tychonoff : Tout produit d'espaces compacts est compact.

③ Notions de séparabilité

But: Etudier différents degrés auxquels on arrive à "séparer" deux sous-ensembles disjoints d'un espace topologique.

ⓐ Espaces de Hausdorff

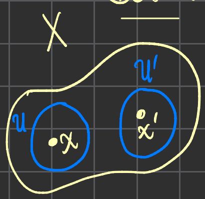
Motivation: Eviter des "pathologies" telles que:

(0) $\# X \geq 2 \Rightarrow \{x\}$ pas fermé dans $(X, \mathcal{T}_{gr})$

(1) $X = \{x, y\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{y\}, X\} \Rightarrow \{y\}$ pas fermé p.r.à $\mathcal{T}$.

Aussi, avoir un bon contexte pour parler de convergence.

Défⁿ: Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est de Hausdorff si



$\forall x, x' \in X$, $x \neq x'$, $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathcal{T}$ tq $x \in \mathcal{U}$, $x' \in \mathcal{U}'$,

et $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$.

(I.e., on peut "séparer" deux points distincts.)

Exemples: (0) $\# X \geq 2 \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ pas de Hausdorff

(∞) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ de Hausdorff $\forall X$

(1) $(X, \mathcal{T})$ métrisable $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ de Hausdorff

Lemme: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $Y \subseteq X$

Si $\# Y < \infty$, alors Y est fermé p.r.à $\mathcal{T}$.

Corollaire: Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique de Hausdorff et $\# X < \infty$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

Déf^n: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ si $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tq $x \in \mathcal{U}$, $\exists\, N_{\mathcal{U}} \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N_{\mathcal{U}} \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}$.

x est alors une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples: (0) $(X, \mathcal{T}_{gr})$: Tout $x \in X$ est une limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(∞) $(X, \mathcal{T}_{disc})$: $\forall$ suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall x \in X$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Leftrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $x_n = x$ $\forall n \geq N$.

(1) $X = \{x, y\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{y\}, \{x,y\}\}$: la suite $(y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et x!

Proposition: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

Proposition: "Etre de Hausdorff" est une propriété topologique.

Proposition: Tout sous-espace compact d'un espace topologique de Hausdorff est fermé.

Proposition: Soit $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ une application continue et bijective. Si $(X, \mathcal{T})$ est compact et $(X', \mathcal{T}')$ est de Hausdorff, alors f est en fait un homéomorphisme.