Propriété universelle du produit : Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur $X_1 \times X_2$. Alors:

$\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \iff$ • $pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ continue $\forall i$

et

• $\forall\, f_1 : Y \to X_1,\ f_2 : Y \to X_2$,

$\big(f_i : (Y, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ continue $\forall i = 1, 2$

$\iff (f_1, f_2) : (Y, \mathcal{T}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}')$ continue $\big)$.

Rmq: $\Rightarrow$: Démontré au cours.

$\Leftarrow$: Laissé aux étudiant.es, à rendre si vous le souhaitez

Exemples: (0) $\mathcal{T}_{gr} * \mathcal{T}_{gr} = \mathcal{T}_{gr}$

(∞) $\mathcal{T}_{disc} * \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{disc}$

iii) Produits cartésiens infinis

Commençons par regarder les produits finis différement ...

Notation: Soient $X_1, \dots, X_n$ des ensembles. Poser

$$\Pi(X_1, \dots, X_n) = \{ f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mid f(i) \in X_i\ \forall i \},$$

et $ev_i : \Pi(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow X_i : f \longmapsto f(i)$.

Lemme: $\exists$ bijection $g : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \Pi(X_1, \ldots, X_n)$
tq $ev_i \circ g = pr_i \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n$.

Motivation pour ...

Déf^n: Soit I un ensemble, et soit $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ une collection d'ensembles. Le produit cartésien de la collection $\mathcal{X}$ est l'ensemble

$$\prod_{i \in I} X_i = \{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \;\; \forall\, i \in I \}$$

muni des projections

$$pr_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_{i_0} : f \longmapsto f(i_0)$$

$\forall\, i_0 \in I$.

Rmqs: • Etant donné $A_i \subseteq X_i \;\; \forall\, i \in I$, on peut voir $\prod_{i \in I} A_i$ comme un sous-ensemble de $\prod_{i \in I} X_i$:

$$\{ f \in \prod_{i \in I} X_i \mid f(i) \in A_i \;\; \forall\, i \in I \}.$$

- $\forall\, i_0 \in I,\ \forall\, A_{i_0} \subseteq X_{i_0}$,
$$pr_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \prod_{i \in I} A_i \,, \text{ où } A = \begin{cases} A_{i_0} : i = i_0 \\ X_i : i \neq i_0 \end{cases}.$$

- $\forall \{A_i, B_i \subseteq X_i \mid i \in I\}$,
$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

<u>Notation:</u> • $\underline{x} \in \prod_{i \in I} X_i$, $x_i = \underline{x}(i)$

- $X_i = X\ \forall i \in I \Rightarrow X^I := \prod_{i \in I} X_i = \{\underline{x} : I \to X \mid \underline{x} \text{ application}\}$

<u>Propriété universelle de produits cartésiens</u> : Soit $\{X_i \mid i \in I\}$ une collection d'ensembles, et soit Y un ensemble. Alors $\forall \{g_i : Y \to X_i \mid i \in I\}$, $\exists!\ g : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ tq $pr_i \circ g = g_i\ \forall i \in I$.

<u>Notn:</u> $g = (g_i)_{i \in I}$.

(iv) Produits quelconques d'espaces topologiques

Déf^n: Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ une collection d'espaces topologiques. La topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la plus petite topologie $\mathcal{T}$ tq

$$pr_{i_0} : \left(\prod_{i \in I} X, \mathcal{T}\right) \longrightarrow (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0})$$

continue $\forall\, i_0 \in I$.

Notn: $\underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_i$

Caractérisation de $\underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_i$: Pour toute collection d'espaces topologiques $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$, la topologie est celle dont une sous-base est $\{pr_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \mid \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$.

Corollaire: Si $\mathcal{B}_i$ est une base de $\mathcal{T}_i$ $\forall i \in I$, alors une base de $\underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_i$ est

$$\left\{ \prod_{i \in I} B_i \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\}\ \forall i \in I,\ \#\{i \mid B_i \neq X_i\} < \infty \right\}.$$

Exemples: (0) $\underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_{gr} = \mathcal{T}_{gr}$ $\quad$ (∞) $\# I = \infty \Rightarrow \underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_{disc} \subsetneq \mathcal{T}_{disc}$

Propriété universelle de la topologie produit :

Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ une collection d'espaces topologiques.

Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur $\prod_{i \in I} X_i$. Alors

$$\mathcal{T}' = \underset{i \in I}{*} \mathcal{T}_i \iff \bullet \ pr_{i_0} : \left(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}'\right) \longrightarrow (X_{i_0}, \mathcal{T}_{i_0}) \text{ continue } \forall i_0 \in I$$

et

$\bullet \ \forall \{f_i : Y \to X_i \mid i \in I\}$

$\left(f_i : (Y, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i) \text{ continue } \forall i \in I \right.$

$\iff (f_i)_{i \in I} : (Y, \mathcal{T}) \to \left(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}'\right)$ continue $\left.\right)$.

(c) Le théorème de Tychonoff

But : Démontrer que tout produit d'espaces compacts est compact.

i) Le cas fini

Rmq : $(X', \mathcal{T}')$ compact $\Rightarrow \left(\{x\} \times X', \{\emptyset, \{x\}\} * \mathcal{T}'\right)$ compact aussi, car $(X', \mathcal{T}') \cong \left(\{x\} \times X', \{\emptyset, \{x\}\} * \mathcal{T}'\right)$

Le lemme du tube : Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques, avec $(X', \mathcal{T}')$ compact. Soit $W \in \mathcal{T} * \mathcal{T}'$. S'il existe $x_0 \in X$ tq $\{x_0\} \times X' \subseteq W$, alors il existe $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tq $x_0 \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \times X' \subseteq W$.