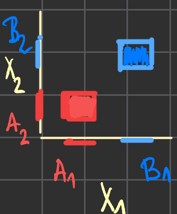
(b) Espaces produit

But : Généraliser la notion d'espace métrique produit et sa topologie associée, en motivant le choix de généralisation par des considérations de continuité.

i) Préliminaires sur le produit cartésien

Notation : $pr_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i : (x_1, x_2) \longmapsto x_i$

Propriétés utiles : Soient $A_1, B_1 \subseteq X_1$, $A_2, B_2 \subseteq X_2$.



- $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$
- $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) \neq (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$
- $pr_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$, $pr_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$
- $\forall f_1 : Y \to X_1$, $f_2 : Y \to X_2$, $\exists$
  $(f_1, f_2) : Y \longrightarrow X_1 \times X_2 : y \mapsto (f_1(y), f_2(y))$

Rmq. Pour $g : Y \to X_1 \times X_2$:
$pr_i \circ g = f_i$ pour $i = 1, 2$
$\Leftrightarrow g = (f_1, f_2)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \\
Y \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & X_1 \times X_2 \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] & \\
 & & X_2
\end{tikzcd}$$

ii) Produits finis d'espaces topologiques

Déf^n: Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques.

La topologie produit sur $X_1 \times X_2$ est la plus petite topologie $\mathcal{T}'$ sur $X_1 \times X_2$ telle que

$$pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$$

continue $\forall\, i = 1, 2$.

Notation: $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$

Caractérisation de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$: Pour tout couple d'espaces topologiques $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$, la topologie produit est celle dont une sous-base est

$$\{ \mathcal{U} \times X_2 \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}_1 \} \cup \{ X_1 \times V \mid V \in \mathcal{T}_2 \}.$$

Corollaire: Pour tout couple d'espaces topologiques $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$, si $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{T}_2$, alors

$$\{ B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1 , B_2 \in \mathcal{B}_2 \}$$

est une base de $\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2$.

Propriété universelle du produit : Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ des espaces topologiques. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur $X_1 \times X_2$. Alors:

$\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \iff$ • $pr_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}') \longrightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ continue $\forall i$

et

• $\forall\, f_1 : Y \to X_1$, $f_2 : Y \to X_2$,

$\big(f_i : (Y, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ continue $\forall i = 1,2$

$\iff (f_1, f_2) : (Y, \mathcal{T}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}')$ continue $\big)$.

Rmq : $\Rightarrow$: Démontré au cours.

$\Leftarrow$: Laissé aux étudiant.es, à rendre si vous le souhaitez

Exemples: (0) $\mathcal{T}_{gr} * \mathcal{T}_{gr} = \mathcal{T}_{gr}$

(∞) $\mathcal{T}_{disc} * \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{disc}$

iii) Produits cartésiens infinis

Commençons par regarder les produits finis différement ...

Notation: Soient $X_1, \dots, X_n$ des ensembles. Poser

$$\Pi(X_1, \dots, X_n) = \{ f : \{1, \dots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mid f(i) \in X_i \ \forall i \},$$

et $ev_i : \Pi(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow X_i : f \longmapsto f(i)$.

Lemme: $\exists$ bijection $g : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \Pi(X_1, \ldots, X_n)$ tq $ev_i \circ g = pr_i \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n$.

Motivation pour ...

Déf^n: Soit I un ensemble, et soit $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ une collection d'ensembles. Le produit cartésien de la collection $\mathcal{X}$ est l'ensemble

$$\prod_{i \in I} X_i = \{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \;\; \forall\, i \in I \}$$

muni des projections

$$pr_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_{i_0} : f \longmapsto f(i_0)$$

$\forall\, i_0 \in I$.

Rmqs: • Etant donné $A_i \subseteq X_i \;\; \forall\, i \in I$, on peut voir $\prod_{i \in I} A_i$ comme un sous-ensemble de $\prod_{i \in I} X_i$:

$$\{ f \in \prod_{i \in I} X_i \mid f(i) \in A_i \;\; \forall\, i \in I \}.$$