

v) Compacité

Rappel : Théorème de Heine-Borel : Les deux affirmations suivantes sont équivalentes pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$(i) \forall \{B_{\text{douv}}(x_i, r_i) \mid i \in I\} \text{ tq } A \subseteq \bigcup_{i \in I} B_{\text{douv}}(x_i, r_i), \\ \exists \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I \text{ tq } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\text{douv}}(x_i, r_i).$$

(ii) A est fermé et borné.

Motivation pour...

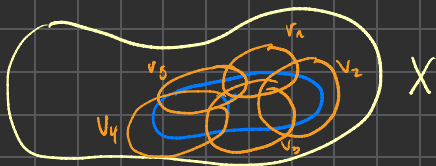
Déf'n : Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. Un recouvrement ouvert de (X, \mathcal{T}) consiste en une collection $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$ tq $X = \bigcup_{V \in \mathcal{N}} V$. Si tout recouvrement ouvert de (X, \mathcal{T}) admet un sous-recouvrement fini, alors (X, \mathcal{T}) est dit compact.

Rmq : Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique, et soit $Y \subseteq X$.

Alors : (Y, \mathcal{T}_Y) compact $\Leftrightarrow \forall \mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$ tq $Y \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{N}} V$,

$\exists V_1, \dots, V_n \in \mathcal{T}$ tq

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i.$$



Lemme: Soient (X, \mathcal{T}) , (X', \mathcal{T}') des espaces topologiques,
et soit $Y \subseteq X$. Si (X, \mathcal{T}) est compact, alors:

(1) Y fermé $\Rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ compact, et

(2) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ continue $\Rightarrow (\text{Im}(f), \mathcal{T}'_{\text{Im}(f)})$ compact.

Vers une caractérisation de la compacité...

Défⁿ: Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si

$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset \quad \forall \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \mathcal{C}, \forall n$, alors

\mathcal{C} vérifie la PIF (propriété d'intersections finies).

Caractérisation de la compacité: Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique.

Alors: (X, \mathcal{T}) est compact \Leftrightarrow si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vérifie la PIF

et C est fermé $\forall C \in \mathcal{C}$, alors

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Lemme: "Être compact" est une propriété topologique.