Lemme: Toute composée d'applications continues est continue.

Question: Quelle est la bonne notion d'isomorphisme pour les espaces topologiques ?

Déf^n: Soient $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ des espaces topologiques. Une application continue $f: (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X',\mathcal{T}')$ est un homéomorphisme s'il admet un inverse continu, i.e., $\exists\ g: (X',\mathcal{T}') \longrightarrow (X,\mathcal{T})$ continue telle que $g \circ f = Id_X$ et $f \circ g = Id_{X'}$.

Terminologie/notation : S'il existe un homéomorphisme $h: (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X',\mathcal{T}')$, on dit que $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ sont homéomorphes, ce que l'on note

$$(X,\mathcal{T}) \cong (X',\mathcal{T}').$$

Déf^n: Une propriété des espaces topologiques est dite topologique si chaque fois que $(X,\mathcal{T}) \cong (X',\mathcal{T}')$ et $(X,\mathcal{T})$ vérifie cette propriété, alors $(X',\mathcal{T}')$ la vérifie également.

Exemple: "Etre fini" est une propriété topologique.

iii) Sous-espaces topologiques

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $Y \subseteq X$.

Soit $i: Y \hookrightarrow X$ l'inclusion.

Lemme: Si $\mathcal{T}'$ est une topologie sur Y, alors

$$i: (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}) \text{ est continue}$$

$$\text{ssi } \mathcal{U} \cap Y \in \mathcal{T}' \ \forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}.$$

Corollaire: La plus petite topologie $\mathcal{T}'$ sur Y telle que $i: (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ est $\{\mathcal{U} \cap Y \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$.

Défn: La topologie de sous-espace sur Y induite par $\mathcal{T}$ est $\mathcal{T}_Y = \{\mathcal{U} \cap Y \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$.

Q: Quand a-t-on $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$?

Lemme: Soit $f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ continue. Alors:

(a) $\forall\, Y \subseteq X$, $f|_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue; et

(b) $\forall\, Y' \subseteq X'$ tq $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y'$, $f|^{Y'} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y', \mathcal{T}'_{Y'})$ est continue.

Procédé général très important!

<u>Lemme de recollement</u>: Soient $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ des espaces topologiques, et soit $f: X \longrightarrow X'$. S'il existe $\{\mathcal{U}_i \mid i\in I\} \subseteq \mathcal{T}$ tq $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ et $f|_{\mathcal{U}_i} : (\mathcal{U}_i, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_i}) \longrightarrow (X',\mathcal{T}')$ est continue $\forall i \in I$, alors $f: (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ est continue.

iv) Autour de la notion de "fermé"

<u>Déf^n</u>: Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $C \subseteq X$ est **fermé** p. r. à $\mathcal{T}$ si $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tq $C = X \setminus \mathcal{U}$.

Q: fermé et ouvert en même temps?

<u>Exemples</u>: (0) Les fermés de $(X,\mathcal{T}_{gr})$ sont ϕ et X.

(∞) Tout sous-ensemble de X est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{disc}$.

<u>Propriétés élémentaires de fermés</u>: Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique. Alors:

(F1) ϕ, X sont fermés p.r. à $\mathcal{T}$;

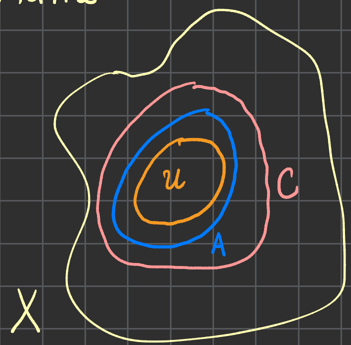
(F2) Toute intersection de fermés est fermée;

(F3) Toute réunion <u>finie</u> de fermés est fermée.

Déf^n: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $A \subseteq X$.

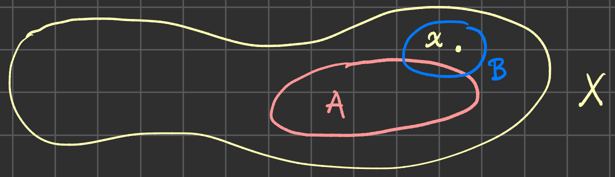
- L'adhérence de A (p.r. à $\mathcal{T}$) est $\bar{A} = \bigcap_{\{C \mid C \text{ fermé}, A \subseteq C\}} C$.
- L'intérieur de A (p.r. à $\mathcal{T}$) est $\text{Int}(A) = \bigcup_{\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}, \mathcal{U} \subseteq A\}} \mathcal{U}$.

Rmq : $\underset{\text{ouvert}}{\text{Int}(A)} \subseteq \underset{= \text{ si } A \in \mathcal{T}}{A} \subseteq \underset{\text{fermé}}{\bar{A}}$ $\quad$ ($A = \bar{A}$ si A fermé)



Caractérisation des adhérences : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{T}$. Alors pour tout $A \subseteq X$,

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \text{si } B \in \mathcal{B} \text{ et } x \in B, \text{ alors } A \cap B \neq \emptyset\}$$



A démontrer la semaine prochaine ...

Caractérisation de la continuité : Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques, et soit $f : X \longrightarrow X'$ une application. Alors les affirmations sont équivalentes.

① $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue.

② $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \forall A \subseteq X$.

③ $A' \subseteq X'$ fermé p.r. à $\mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(A')$ fermé p.r. à $\mathcal{T}$.

Lemme de recollement, bis : Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ des espaces topologiques, et soit $f : X \longrightarrow X'$. S'il existe un ensemble $\{C_1, \dots, C_n\}$ de fermés tq $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ et $f|_{C_i} : (C_i, \mathcal{T}_{C_i}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue $\forall\, 1 \leq i \leq n$, alors $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ est continue.